This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

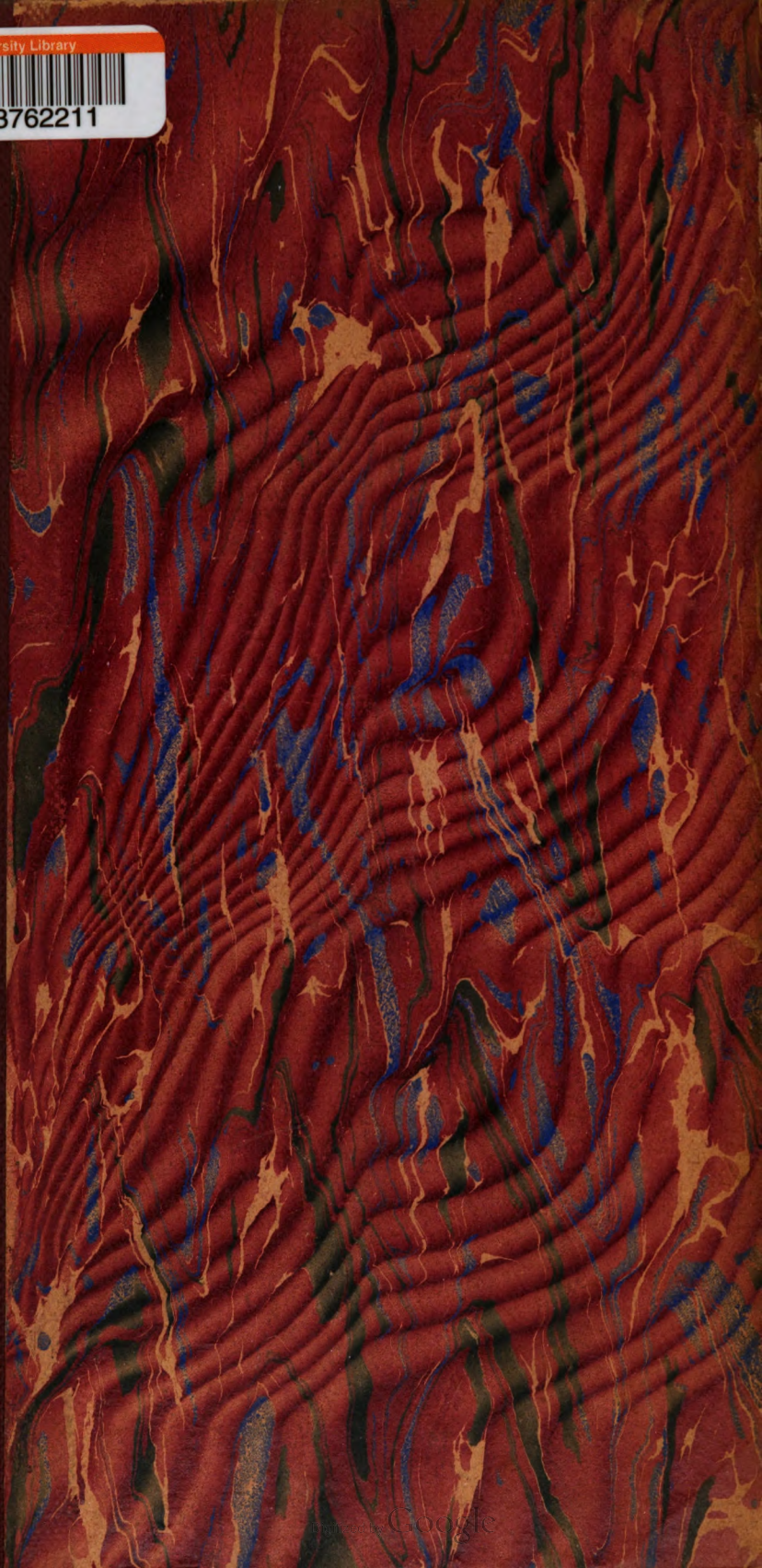
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Princeton University Library
32101 073762211



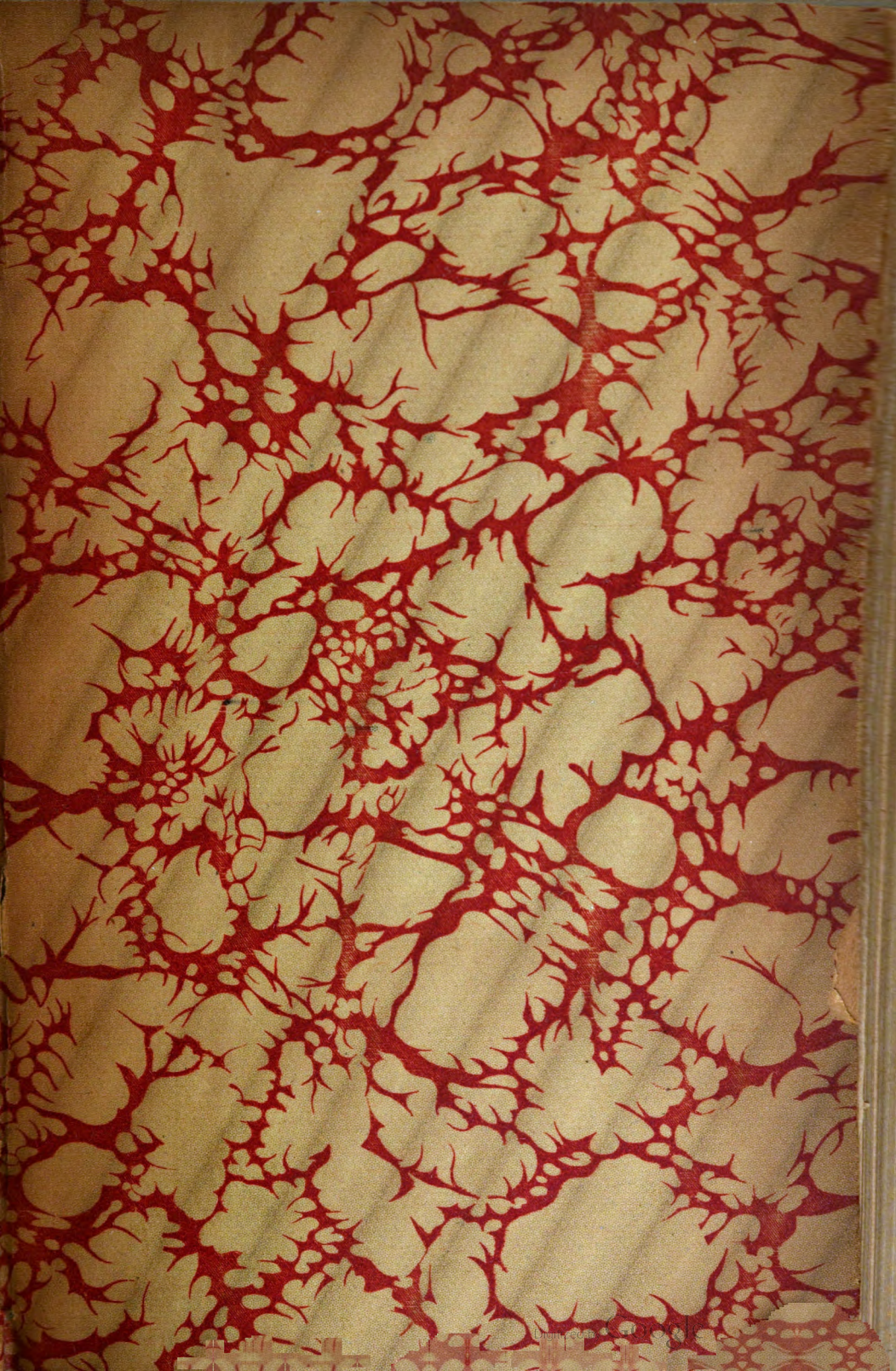
Digitized by Google

0914
.108
v.83-84

Library of

Princeton University.

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

METZER AKADEMIE

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE DE METZ

Digitized by Google

Digitized by Google

METZER AKADEMIE

LITTERATUR, WISSENSCHAFT, KUNST UND LANDWIRTSCHAFT

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE DE METZ

LETTRES, SCIENCES, ARTS ET AGRICULTURE

L'Académie de Metz a été fondée par Lettres patentes de Juillet 1760

2e PÉRIODE — LXXXIVe ANNÉE — 3e SÉRIE — XXXIIe ANNÉE

1902-1903

METZ
IMPRIMERIE LORRAINE (ÉDITION & IMPRESSION)
IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE
Rue des Clercs, 14

1905

Digitized by Google

L'Académie ne prend pas la responsabilité des opinions émises dans les Notices ou Travaux particuliers que renferment ses Mémoires.

Digitized by Google

JÄHRLICHE SITZUNG

Digitized by Google

Digitized by Google

Bericht

über

die Tätigkeit der Akademie

während des Jahres 1902-1903

erstattet von

Herrn V. PREVEL, Schriftführer.

Meine Herren!

Die Aufgabe Ihres Schriftführers, für das verflossene Jahr den Bericht zu erstatten über die auffälligeren Erscheinungen aus dem Leben Ihrer Gesellschaft und über deren wissenschaftliche Tätigkeit, ist nicht leicht.

Einst brachte die Fülle des Stoffes den Schriftführer in Verlegenheit.

Heute ist dies leider nicht mehr so. Die Sorge ist vielmehr eine andere geworden. Ich finde mich in der Lage einer Arbeiterin, die wohl den Stramin vor sich hat, der aber Vorlage und Wolle zum Stricken fehlen.

Wenn es in der Akademie fette Jahre gegeben hat, so müssen wir gestehen, dass jetzt die Reihe der mageren gekommen ist. Und zwar ist die Magerkeit unserer Tätigkeit so gross geworden, dass wir unmittelbar vor einer Zeit des Aufschwunges und der Blüte stehen müssen, wofern der Ausspruch wahr ist, dass die Extreme sich berühren.

Möge meine Ahnung berechtigt sein! Diese

Digitized by Google

Hoffnung ist es, die mir heute Kraft zur Erfüllung meiner Pflicht gibt.

Übrigens will ich gleich hinzufügen, dass zwar Notstand bei uns herrscht, aber doch kein völliger Mangel.

Bei Beginn des verflossenen Jahres hatte unser verehrter Präsident, der heute den Vorsitz abgibt, eine begeisterte Ansprache gehalten, damit wieder regeres und tätigeres Leben bei uns einziehe.

Dieser Ruf ist nicht gänzlich ungehört verhallt. Denn wenn wir auch nicht viele Arbeiten zu verzeichnen haben, so ragen sie doch durch ihren Wert hervor.

Freilich sind es meistens naturwissenschaftliche und mathematische Fragen die uns beschäftigt haben; Fragen, bei denen eine gewisse Trockenheit unausbleiblich ist. Gibt es aber für einen Bericht etwas schrecklicheres als trockene Zahlen aufzuführen?

Dennoch sind diese Zahlen nicht unbedeutend; denn sie erinnern uns an die hervorragenden Arbeiten, die wir haben vortragen hören. Ja, einige dieser Vorträge aus unseren allmonatlichen Sitzungen enthalten neue Entdeckungen oder werden noch solche zutage fördern.

So hat sich unser gelehrter Herr Kollege SCHUSTER würdig dem grossen Foucault an die Seite gestellt, indem er einen Apparat erfunden hat, der die Umdrehung der Erde dartut, und zwar hat er den Beweis im Zimmer geführt, während Foucault der Kuppel des Pariser Pantheons bedurfte.

Ebenso hat uns Herr HUBER eine Theorie über

Digitized by Google

den Ursprung und die Erzeugung des Feuers im Innern der Erde auseinandergesetzt. Freilich ist sie einstweilen noch eine reine Hypothese; aber dennoch dermassen verlockend, dass es nicht auffällig wäre, wenn eines Tages deren Richtigkeit bewiesen würde. Alsdann werden wir stolz darauf sein können, dass der Gelehrte in unserm bescheidenen Heim seine Lehre zuerst aufgestellt hat.

Eine andere Berühmtheit unserer Gesellschaft, Herr C. MASSING, hat der Akademie eine hochwichtige Studie über die Probleme der analytischen Geometrie und über die Parallelen der Parabel gewidmet.

Es handelt sich hier um eine so gelehrte Arbeit, dass viele unter uns deren Wert nicht genau haben beurteilen können. Aber unser gelehrter Herr Kollege de Goy, der sie besprochen, hat mit der ganzen Macht seiner Autorität die Beweisführung des Herrn Massing anerkannt. Für uns ist diese Stellungnahme entscheidend ; sie gibt der Studie einen ausserordentlichen Wert.

Übrigens haben wir auch noch einige andere gelehrte Beiträge erhalten, die aber für gewöhnliche Sterbliche leichter fasslich waren.

So hat die Entwicklung unserer alten Stadt Metz, die sich von ihrer Überraschung, plötzlich ihrer ehrwürdigen Wälle entkleidet zu werden, kaum noch erholt hat, auch bei uns Widerhall gefunden. Wie es Pflicht der Akademie war, hat Herr COLON in einem sorgfältigen Bericht die Bitte ausgesprochen, es möchten bei Benennung der geplanten Strassen in den neuen Stadtvierteln einige jener Berühmtheiten verewigt werden, die einstens in

Digitized by Google

so grosser Anzahl auf unserm Boden erstanden sind. Ob die Bitte Erfolg haben wird, wissen wir nicht; unser Wunsch ist es jedenfalls.

Auch dem Amphitheater gegenüber, dessen Trümmer unter den Befestigungswerken vor dem Theobaldstor blosgelegt worden, konnte die Akademie nicht gleichgültig bleiben. Herr Abbé PAULUS hat denn auch in einer unserer Sitzungen einen gelehrten Vortrag über den einstigen Zustand dieses Rundbaus gehalten, der durch die ganz eigentümliche und einzige Art seiner Arena besonderes Interesse erregt. Die Trümmer sind aus ihrem Grabe erstanden, um einen Augenblick die Sitten und Feierlichkeiten des Altertums an uns vorüberziehen zu lassen.

Vielleicht hatte einstens ein römischer Kaiser den Bau betreten. Heute hat dessen Überbleibsel ein deutscher Kaiser seines Blickes gewürdigt. Und bald wird alles wieder verschwunden sein, um unter dem Bahnhofe begraben zu liegen. Ein Beispiel für den Aufschwung und den Verfall, dem alles Menschliche unterworfen ist!

Dasselbe Schicksal ist übrigens dem kleinen Amphitheater zuteil geworden, das zu Metz an der Friedensstrasse liegt und etwa vierhundert Jahre jünger ist. Auch hier ruhen nur noch Trümmer unter der Erde.

Seiner liebenswürdigen Gewohnheit gemäss hat Herr LAMETZ auch dieses Jahr wieder unsere Versammlungen mit Mitteilungen über die verschiedensten Gegenstände beehrt. In dieser Hinsicht

Digitized by Google

ist er eines unserer tätigsten Mitglieder. Möge Gott ihn uns noch lange erhalten!

Unter anderem hat er eine Denkschrift des Barons Dufour über den russischen Feldzug besprochen; ferner den Bericht über die Zulassung desselben Dufour zur Metzer Akademie, der anzugehören wir mit Recht stolz sind, da sie so viele berühmte Mitglieder aufzuweisen hat. Auch kleine Apparate hat er uns erklärt, welche die Umdrehung der Erde dartun sollen; ebenso hat er über den geschlossenen Ring berichtet, an dem ein kühner Radfahrer im Olympiatheater zu Paris allabendlich die Zentrifugalkraft beweist, zur Unterhaltung der Zuschauer, aber mit eigener Lebensgefahr.

Herr Abbé Barthelemy hat eine unserer Sitzungen in anziehender Weise durch Vorlesen eines verwickelten Berichtes ausgefüllt, den ein mittelalterlicher Richter über einen in unserer Nähe, in der Herrschaft Lue, begangenen Mord aufgesetzt hat. So ist uns ein Vergleich zwischen der heutigen Rechtspflege und der von ehedem möglich geworden.

Endlich hat unser unermüdlicher Herr Kollege Lametz, den ich schon eben erwähnt, dieses Jahr den Bericht über den Wettbewerb um die Tugendpreise übernommen. Brauche ich noch zu erwähnen, dass er seiner Aufgabe mit seiner gewöhnlichen Tüchtigkeit gerecht geworden ist.

So glaube ich, meine Herren, die Aufzählung unserer diesjährigen Arbeiten beendet zu haben. Wie sie sehen, sind es deren nicht viel. Ich am meisten bedauere, dass ich meinen Bericht nicht habe so gestalten können, wie ich es gern gewünscht hätte.

Digitized by Google

Es hat Jahre gegeben, in denen der Bericht des Schriftführers ein wahrer literarischer Genuss war. Die Bände unserer Memoiren können es bezeugen. Dieses Jahr ist leider auch der Jahresbericht nur allzusehr der Armut des übrigen angepasst.

Erlauben Sie mir Ihnen zu sagen, meine Herren, dass die Verantwortlichkeit dafür zum Teil auf Sie selbst zurückfällt. Denn wenn Sie auf mich gehört hätten, so würden Sie mir nicht ein Amt auferlegt haben, zu dessen Erfüllung es mir sowohl an Fähigkeit als an Zeit gebricht.

Noch ein Wort muss ich über die Lage der Akademie bezüglich ihrer Mitglieder sagen.

Auch hier ist die Aufzählung der eingetretenen Veränderungen kurz.

Sicherlich bedauern wir das nicht hinsichtlich der Lücken, die der Tod etwa gerissen hat. Unsere Reihen lichten sich meist nur allzuschnell. Um so mehr dürfen wir uns freuen, dass wir dieses Jahr nur zwei Sterbefälle aufzuweisen haben.

Leider sind die Verstorbenen gerade die bedeutendsten Kenner auf dem Gebiete des Weinbaus: die Herren AMBLARD und BILLOTTE. Mehr als eine Sitzung hatten die Herren durch ihre interessanten Ausführungen über die Reblausfrage auszufüllen gewusst, wie sie überhaupt beide zu den tätigsten Mitgliedern zählten.

Der eine ist dem andern bald im Tode nachgefolgt. Merkwürdigerweise gehörte Herr Billotte zuletzt jenem Ausschuss an, der die Kandidatur des Herrn GUÉPRATTE, unseres nunmehrigen Kollegen, zu prüfen hatte. Das Geschick hat gleichsam gewollt, dass Herr Billotte sich besonders bei der

Digitized by Google

Wahl des Mitgliedes betätige, das ihn auf dem Gebiete des Weinbaus zu ersetzen bestimmt war. Und andrerseits sollte der erste Beitrag des Herrn Guépratte gerade ein Nachruf auf Herrn Billotte sein.

Ein Beweis, dass auch wir den allgemeinen Gesetzen unterliegen ! Wie in der Natur, so ist es auch bei uns : ein jeder erscheint auf der Bildfläche, um dann wieder auf ewig zu verschwinden. Aber wie in der Natur auf den Tod das Leben folgt, so füllen sich auch bei uns die Lücken immer wieder aus.

So haben wir an Herrn Billotte einen tüchtigen Weinbauer verloren : einen ebenso bedeutenden haben wir an Herrn Guépratte gewonnen.

Aber Herr Guépratte ist auch das einzige wirkliche Mitglied, dessen Eintritt wir dieses Jahr begrüssen können.

Etwas zahlreicher sind die neu eintretenden korrespondierenden Mitglieder.

So haben wir nacheinander aufgenommen : Herrn FLORANGE, einen ausgezeichneten Münzkenner; Herrn WEYLANDT, Pfarrer von Vernéville; Herrn GRANDMANGIN, Dichter ; Herrn LEROND, Lehrer zu Saint-Julien.

Die Herren Weylandt und Lerond haben sich mehrfach mit Erfolg an unseren Preisausschreiben beteiligt ; beide haben auf ihrem Gebiete tüchtige Werke verfasst, die sie der Akademie gewidmet. Wir dürfen hoffen, dass sie nunmehr selbst in die Akademie aufgenommen, in ihrem Eifer nicht nachlassen, vielmehr unsere Memoiren mit ihren Beiträgen bereichern werden.

Digitized by Google

Meine Aufgabe ist zu Ende. Aber, meine Herren, bevor ich abtrete, möchte ich noch mit hoffnungsvollem Blick die Morgenröte des neuen Jahres begrüssen, das sich vor uns auftut.

Diese Hoffnung ist völlig berechtigt mit Rücksicht auf unsern neuen Vorstand.

Ist denn Herr Abbé Paulus, unser neuer Präsident, nicht der Inbegriff aller Tätigkeit? Und lässt uns die hervorragende Tüchtigkeit des Herrn Huber, unseres neuen Vizepräsidenten, nicht baldige Tage neuen Glanzes erhoffen?

Ja, meine Herren, wenn wir auch traurige Zeiten durchzukämpfen gehabt haben, so dürfen wir doch noch Vertrauen in die Zukunft hegen, und es wird keine Anmassung in dem Gedanken liegen, dass der Stern unserer Akademie noch einmal hell aufleuchten wird.

Wenn auch die Bemühungen derjenigen, welche die letzten Jahre in unserer Mitte verbracht haben, nicht sehr trostbringend gewesen sind, so kann man sie doch nicht erfolglos nennen. Das Verdienst dieser Mitglieder ist es, den Fortbestand unserer Gesellschaft gesichert und deren herrliche Vergangenheit mit der Zukunft verknüpft zu haben, einer Zukunft, die vielleicht der Vorzeit an Glanz nicht nachstehen wird.

Ist die Aufrechterhaltung einer Gesellschaft wie der unsrigen nicht eine edle Aufgabe? Wenn nach Jahren die ehemalige Herrlichkeit wieder ihren Einzug gehalten hat und unsere Nachfolger und Abkömmlinge beim Durchblättern unserer Memoiren aus dem geringen Umfange der jetzigen Bände auf unsere heutigen Schwierigkeiten und Kämpfe schliessen, dann werden sie uns mit Dank-

Digitized by Google

barkeit vergelten, dass wir für sie gelitten und gekämpft haben.

Mutig also voran, meine Herren! Auf zur Eroberung neuen Glanzes und neuer Herrlichkeit!

Digitized by Google

Digitized by Google

I

SÉANCE ANNUELLE

Digitized by Google

Digitized by Google

COMPTE RENDU

DES

TRAVAUX DE L'ACADÉMIE

PENDANT L'ANNÉE 1901-1902

PAR

M. V PREVEL, SECRÉTAIRE

MESSIEURS,

La tâche de votre secrétaire, chargé de faire le rapport annuel sur les travaux de votre honorable compagnie et les faits saillants de son existence pendant l'année qui se termine aujourd'hui, n'est pas chose facile.

Il fut un temps où le travail du secrétaire était compliqué par l'abondance des matières.

Aujourd'hui, hélas! ce souci n'existe plus, et l'embarras, dans lequel je me trouve, est comparable à celui de l'ouvrière chargée de broder un canevas tendu sur le métier, mais à qui manquent le dessin et les laines qui pourraient le couvrir.

S'il y a eu à l'Académie des années grasses, force nous est de convenir que nous sommes passés à la période des années maigres. Mais comme les extrêmes se touchent, — s'il faut en croire le proverbe, — nous sommes dans un tel

Digitized by Google

état de maigreur, en ce qui concerne nos travaux et notre production, qu'on peut espérer que nous allons de nouveau bientôt revoir une période de prospérité.

Acceptons-en au moins l'augure, et que cette espérance me soutienne dans l'accomplissement de mon travail d'aujourd'hui.

Il faut convenir, d'ailleurs, que, s'il y a eu pénurie chez nous, il n'y a pas eu disette absolue.

Notre sympathique président, qui quitte aujourd'hui le fauteuil présidentiel, nous avait, au début de l'année qui s'achève, adressé un éloquent appel, afin que la vie redevienne, parmi nous, plus intense et plus active.

Cet appel n'est pas positivement resté lettre morte, et si nous n'avons pas eu, cette année, quantité de travaux à enregistrer, nous avons tout au moins une qualité indiscutable dans notre production.

Il est vrai qu'ici aussi, il y a encore une certaine aridité qui se met de la partie, en ce sens que ce sont principalement des questions scientifiques qui ont formé notre plus précieux bagage. Et y a-t-il quelque chose de plus terrible que les chiffres pour un rapport littéraire?

Pourtant ces chiffres ont une réelle valeur ; car il nous a été donné d'entendre d'éminents travaux de savants. Je dirai plus : nous avons pu, dans nos comptes rendus mensuels, faire prendre date à des rapports qui sont ou deviendront de véritables découvertes.

C'est ainsi que notre savant confrère, M. Schuster, s'est révélé concurrent de Foucault, en in-

Digitized by Google

ventant un appareil destiné à faire la démonstration en chambre de la rotation de la terre, pour laquelle il n'avait pas fallu à Foucault moins que la coupole du Panthéon à Paris.

De même, M. HUBER nous a exposé une théorie sur les origines et la production du feu intérieur de notre planète, qui, sans doute, est encore dans le domaine de la pure hypothèse, mais qui, néanmoins, est tellement séduisante, qu'il n'y aurait rien de surprenant à ce qu'un jour ou l'autre on en démontre la réelle existence. Ce jour-là, évidemment, nous serons fiers de dire que c'est dans cette modeste enceinte que notre savant a, pour la première fois, exposé la théorie nouvelle.

Une autre illustration de notre Société, M. C. MASSING, a dédié à l'Académie un travail d'une haute valeur sur les problèmes de la géométrie analytique et sur les normales de la parabole.

Il s'agit ici d'un travail tellement abstrait, que beaucoup d'entre nous n'ont pu en apprécier exactement la valeur, mais M. DE GOY, notre érudit confrère, qui en a fait la critique, s'est incliné, avec toute l'autorité de sa compétence, devant les déductions scientifiques de M. MASSING, et c'est là une consécration qui met cette étude hors de pair.

Nous avons eu, d'ailleurs, encore quelques travaux non moins transcendants, mais plus à la portée des simples mortels.

L'évolution qui se fait dans notre vieille ville de Metz, à peine revenue encore de sa surprise de se voir tout à coup dépouillée de ses antiques

Digitized by Google

remparts, a eu son écho chez nous, et comme il convenait à l'Académie de Metz, M. COLON, dans un rapport bien documenté, a demandé qu'on immortalise quelques-unes des illustrations qui ont, dans le temps, si abondamment germé sur notre sol généreux, en cherchant parmi elles les noms à donner aux rues nouvelles qu'on trace en ce moment sur l'emplacement des remparts disparus. La chose aura-t-elle une sanction? Nous n'en savons rien encore, mais c'est à souhaiter.

L'Académie ne pouvait non plus se dispenser de s'occuper de l'amphithéâtre romain, dont les ruines ont été retrouvées sous les glacis de la porte Saint-Thiébault ; et dans une de nos séances, M. l'abbé PAULUS nous a fait une savante dissertation sur ce qu'avait été cet amphithéâtre, qui offre un intérêt tout particulier, en ce sens que son arène avait une disposition qui n'avait été trouvée nulle part ailleurs. Ces ruines sont sorties de leur tombeau pour nous faire revivre un instant les mœurs et les fêtes de l'ancien temps.

Peut-être qu'un empereur romain les avait autrefois foulées. Aujourd'hui, un empereur germanique vient de leur faire l'honneur d'un regard ; puis elles vont de nouveau disparaître sous terre, pour être recouvertes par le chemin de fer, nous donnant ainsi un exemple de plus de la grandeur et de la décadence auxquelles sont vouées toutes les œuvres de l'homme.

Le même sort a, du reste, été partagé par le petit amphithéâtre de la rue de la Paix, à Metz, qui, quoique de quatre siècles plus jeune, n'existe plus qu'à l'état de murailles enfouies sous terre.

Digitized by Google

M. LAMETZ a continué ses aimables traditions, en agrémentant nos séances d'intéressantes communications sur les sujets les plus variés. C'est, à ce point de vue, un de nos membres les plus actifs. Dieu veuille nous le conserver longtemps!

Il nous a entretenu entr'autres d'un *Mémoire sur la Campagne de Russie*, par le baron Dufour, puis du rapport sur la candidature du même baron Dufour à cette même Académie de Metz, à laquelle nous sommes, à bon droit, fiers d'appartenir, puisqu'elle a compté des hôtes aussi illustres ; puis de petits appareils tendant à démontrer la rotation de la terre, et enfin de la boucle fermée de l'Olympia à Paris, où un hardi cycliste fait chaque soir la démonstration saisissante de la force centrifuge, en risquant sa vie pour la distraction de ses spectateurs.

M. l'abbé BARTHELEMY a occupé une de nos séances d'une façon très intéressante en nous lisant le grimoire d'un juge du moyen-âge à propos d'un homicide commis dans la Seigneurie de Lue, tout près de chez nous par conséquent. Nous avons pu ainsi faire des comparaisons entre ce qu'était la justice autrefois et ce qu'elle est aujourd'hui.

Enfin, notre infatigable confrère, M. LAMETZ, dont je viens de parler, a fait cette année le rapport annuel sur le concours des prix de vertu, et il s'en est acquitté, est-il besoin de le dire, avec la compétence et l'autorité qui s'attachent à sa plume.

Je crois avoir terminé, Messieurs, l'énumération de nos travaux annuels. Comme vous voyez, la

Digitized by Google

liste en est courte, et je regrette que le rapport de votre secrétaire ne soit pas à la hauteur où il eût lui-même souhaité le voir.

Il y a eu parmi nous des années où le rapport annuel du secrétaire n'était pas le moindre régal littéraire de l'Académie. Les volumes des mémoires sont là pour en faire foi. Cette année, hélas! cette partie du volume des mémoires ne sera que trop bien au niveau de la pauvreté de l'ensemble.

Permettez-moi de vous dire, Messieurs, que la responsabilité en retombe en partie sur vous, car si vous aviez écouté ma voix, vous m'eussiez déchargé d'un poste pour lequel je n'ai ni les loisirs ni le talent nécessaires.

Il me reste à vous dire un mot de la situation de l'Académie au point de vue de ses membres.

Ici encore l'énumération des modifications qui se sont produites dans notre personnel sera brève.

Ne nous en plaignons pas en ce qui concerne les vides que la mort a pu faire. Nos rangs s'éclaircissent toujours trop vite et nous devons nous applaudir de n'avoir cette année que deux morts à déplorer.

Malheureusement ce sont précisément les deux membres les plus éminents dans le domaine de la viticulture que nous avons perdus : j'ai nommé MM. Amblard et Billotte. Ces Messieurs avaient charmé plus d'une de nos séances par leurs intéressantes discussions sur la question du phylloxéra. Ils étaient du reste tous deux de nos membres les plus actifs.

Ils se sont suivis d'assez près dans la tombe et par une étrange coïncidence la dernière commis-

Digitized by Google

sion dont M. BILLOTTE ait fait partie, fut précisément celle chargée d'examiner la candidature de M. GUÉPRATTE, notre nouveau collègue actuel. On dirait que le destin a voulu qu'avant de nous quitter, M. BILLOTTE coopérât spécialement à l'élection du membre qui devait prendre sa place dans le domaine de la viticulture, et par une cruelle ironie du sort, le premier travail que M. GUÉPRATTE nous ait fourni, est précisément la notice nécrologique de M. BILLOTTE.

Ceci nous montre que nous n'échappons pas aux lois communes. Chez nous comme partout dans la nature, chacun trace son sillage et puis rentre dans l'éternité, mais, de même que, dans la nature, la vie succède constamment à la mort, nous pouvons constater aussi que les vides qui se font dans nos rangs se comblent pour ainsi dire d'eux-mêmes.

Nous avons perdu en M. BILLOTTE un éminent viticulteur ; nous en retrouvons un non moins éminent en M. GUÉPRATTE.

Par contre, M. GUÉPRATTE est le seul membre titulaire dont il nous ait été donné de saluer l'entrée dans nos rangs.

Les réceptions de membres correspondants ont été un peu plus nombreuses.

Nous avons admis successivement comme tels : M. FLORANGE, numismate distingué ; M. l'abbé WEYLANDT, curé de Vernéville ; M. GRANDMANGIN, poëte, et M. LEROND, instituteur à Saint-Julien.

MM. WEYLANDT et LEROND ont pris part plusieurs fois avec succès à nos concours et ont produit chacun dans leur genre plusieurs œuvres de mérite,

Digitized by Google

dont ils ont fait hommage à l'Académie. Espérons que maintenant qu'ils appartiennent à notre compagnie, leur activité ne se ralentira pas et qu'ils contribueront puissamment dans l'avenir à enrichir nos mémoires.

J'ai fini, Messieurs, mais avant de vous quitter, permettez-moi de saluer d'un regard rempli d'espérance l'aube de l'année nouvelle qui s'ouvre sur nous.

Le bureau qui va nous diriger légitime pleinement la chose.

M. l'abbé PAULUS, notre nouveau président, n'est-il pas chez nous l'incarnation de l'activité ? et l'éminente distinction qui caractérise M. HUBER, notre vice-président, ne nous ouvre-t-elle pas des horizons pleins de réconfort pour notre prospérité future ?

Oui, Messieurs, si nous avons eu à traverser des périodes appauvries, nous pouvons pourtant avoir encore confiance dans l'avenir et ce n'est pas de la présomption de penser que l'étoile de l'Académie de Metz brillera encore d'un bel éclat.

Le rôle de ceux qui sont passés parmi nous dans ces dernières années a pu être un rôle ingrat, mais ce n'a sûrement pas été le moins utile, car il a assuré la survivance de notre compagnie et il a servi à léguer son brillant passé à un avenir qui peut-être ne le cédera en rien au passé.

Sauver l'existence d'une corporation comme la nôtre, n'est-ce rien, Messieurs ? Si, dans quelques lustres d'ici les splendeurs d'antan sont revenues, croyez-vous que nos successeurs et descendants n'auront pas pour nous un souvenir reconnaissant

Digitized by Google

lorsque contemplant la série des mémoires de l'Académie, ils reconnaîtront à la vue des volumes plus minces qui marqueront les années présentes, la période de luttes que nous avons subie et les difficultés que nous avons vaincues pour eux ?

Courage donc, Messieurs, et en avant ! à la conquête d'une prospérité et d'un éclat nouveaux !

Digitized by Google

Digitized by Google

BUREAU

DE

L'ACADÉMIE DE METZ

POUR L'ANNÉE 1903

Président d'honneur:
M. LE PRÉSIDENT DE LA LORRAINE

Président honoraire.	M. LE CHANOINE H.-D. COLLIN
Président titulaire .	M. L'ABBÉ PAULUS
Vice-Président. . .	M. E. HUBER
Secrétaire	M. V. PREVEL
Secrétaire-Archiviste.	M. CODBAT
Trésorier	M. CHOPPÉ

Agent: M. FLEUR

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLEAU

DES

MEMBRES DE L'ACADÉMIE

Digitized by Google

SIGNES ABRÉVIATIFS.

. Chevalier de la Légion d'honneur.
O. . Officier — —
C. . Commandeur — —
G. O. . Grand officier — —
. Médaille militaire.
. Chevalier de l'ordre de Saint-Sylvestre.
A. . Officier d'Académie.
I. . Officier de l'Instruction publique.
. Mérite agricole.

Digitized by Google

LISTE DES MEMBRES

DU

BUREAU DE L'ACADEMIE

DEPUIS 1819 JUSQU'A 1903.

L'astérisque indique les membres vivants.

Années	*Présidents :*	*Secrétaires :*	*Secrét.-Arch. :*	*Trésoriers :*
—	MM.	MM.	MM.	MM.
1819-20	De Sarrazin.	Herpin.	..	Saincère.
1820-21	Gorcy.	id.	..	id.
1821-22	Bergery (1).	id.	..	Chaumas.
1822-23	Thiel.	id.	..	Anspach.
1823-24	Poncelet.	Devilly.	..	Dosquet.
1824-25	Serrulas. (2)	id.	Thiel.	Cailly.
1825-26	Bergery.	id.	Renault.	Anspach.
1826-27	Renault.	Bergery.	Bardin.	Woisard.
1827-28	Dosquet.	id.	Munier.	Chambille.
1828-29	Bardin.	id.	id.	id.
1829-30	Bon Marchant	id.	id.	id.
1830-31	Chaumas.	Dosquet.	Renault.	Didion.
1831-32	Bergery. (3)	id.	id.	Bardin.
1832-33	Gosselin.	id.	id.	Munier.
1833-34	Bergery. (4)	Lasaulce.	Simon, V.	Le Masson.
1834-35	Le Masson (1)	De Saulcy F.	id.	Marchal.
1835-36	Bergère. (1)	Gosselin.	id.	id.
1836-37	Faivre.	Macherez.	id.	Munier.
1837-38	Le Masson (2)	Gosselin.	id.	id.
1838-39	Didion.	Desains.	id.	id.
1839-40	Culmann. (1)	Bégin.	id.	id.
1840-41	Lucy.	La Bastide.	id.	id.
1841-42	Mézières.	id.	id.	id.
1842-43	Culmann. (2)	Livet.	id.	id.
1843-44	Malherbe. (1)	id.	id.	id.
1844-45	Bergère. (2)	De St-Vincent.	N.	id.
1845-46	Simon, V. (1)	Blanc.	Clercx.	id.
1846-47	Michel, E. (1)	Robert.	id.	id.
1847-48	Malherbe. (2)	Prost Aug.	id.	id.
1848-49	Michel, E. (2)	Boulangé.	id.	id.
1849-50	Malherbe. (3)	Faivre.	id.	id.
1850-51	Emy.	De Saulcy E.	id.	id.
1851-52	Langlois.	*Jacquot, E.	id.	id.
1852-53	Simon, V. (2)	Grellois.	id.	id.
1853-54	Malherbe (4)	id.	id.	id.
1854-55	De Saulcy E. (1)	De Chastellux.	id.	id.
1855-56	*Jacquot, E.	Vincenot.	id.	Chabert.
1856-57	Woirhaye.	id.	id.	id.

Digitized by Google

Années —	*Présidents :* MM.	*Secrétaires :* MM.	*Secrét.-Arch. :* MM.	*Trésoriers :* MM.
1857-58	Susane.	Du Colombier.	Clercx.	Chabert.
1858-59	Salmon.	De Bouteiller.	id.	id.
1859-60	Scoutetten.	id.	id.	id.
1860-61	G[l] Didion.	id.	id.	id.
1861-62	Leclerc.	Bouchotte.	id.	id.
1862-63	Mézières (2).	id.	id.	id.
1863-64	De Gérando.	id.	id.	id.
1864-65	De Puymaigre.	*Michel E.	id.	id.
1865-66	De Bouteiller.	Thilloy J.	*Marcus.	id.
1866-67	Raillard.	id.	id.	De St-Martin.
1867-68	Goulier.	id.	id.	id.
1868-69	*Michel, E.	Cailly.	id.	id.
1869-70	Grellois.	id.	id.	id.
1870-71	*Jacquot, A.	Lejeune J.	id.	id.
1871-72	Virlet.	Abel.	id.	id.
1872-73	Maguin, H.	Lorrain.	id.	Fleck.
1873-74	Fleck (1).	Taratte.	id.	Démoget.
1874-75	Orbain.	*Schuster.	id.	*Bellevoye.
1875-76	Abel, Ch.	id.	id.	id.
1876-77	De Saulcy E. (2)	id.	id.	id.
1877-78	Cailly, Ch.	Bérard A.	id.	id.
1878-79	*Dr Winsback (1)	id.	id.	id.
1879-80	Bezançon P.	id.	*Gandelet.	id.
1880-81	Fleck (2).	id.	Chartener.	id.
1881-82	*De Saulcy F.	id.	id.	id.
1882-83	Chartener.	id.	*Friren, A.	id.
1883-84	Fleck (3).	id.	id.	id.
1884-85	Benoit, A.	id.	id.	id.
1885-86	*Dr Winsback (2)	id.	id.	id.
1886-87	A. de Lazarque.	id.	id.	id.
1887-88	*Jacquemin. R.	*Ferrez, E.	id.	id.
1888-89	Bérard, A. (1)	id.	id.	*Lametz.
1889-90	*Huber, E.	Box, N.	id.	id.
1890-91	*Ferrez, Eu.	id.	id.	id.
1891-92	Fleck (4)	id.	id.	id.
1892-93	Bérard. (2)	id.	id.	id.
1893-94	Vion H.	id.	id.	id.
1894-95	*Huber, E. (2)	id.	id.	id.
1895-96	Greff.	id.	*De Tinseau.	id.
1896-97	*Winsback (3)	id.	id.	id.
1897-98	*Ferrez	*Paulus E.	id.	id.
1898-99	Box, N.	id.	id.	id.
99-1900	*Simon, L.	id.	*Choppé	id.
1900-01	*V. de Tinseau	*Dr Meyer Jules	*Codbat	*V. Prevel
1901-02	*Lametz	*Choppé	*Codbat	*V. Prevel
1902-03	*Collin H.-D.	*V. Prevel	*Codbat	*Choppé.

Digitized by Google

LISTE DES MEMBRES

DES DIVERSES CLASSES DE L'ACADÉMIE

A la date du 31 Mai 1903

Membres fondateurs et bienfaiteurs de l'Académie.

M. le Maréchal de BELLE-ISLE, fondateur de la Société royale des sciences de Metz.

M. le baron de LADOUCETTE
Mlle BOUCHOTTE
M. PÊCHEUR
} fondateurs des prix de vertu.

M. HERPIN, fondateur du prix dit Herpin.

Membres honoraires.

MM.

1896. BELLEVOYE (ADOLPHE), A. ✠, membre de la société entomologique de France, rue Talleyrand, à Reims (Marne). (*Agrégé-artiste* en 1858; *titulaire en* 1871; *Associé-libre non résidant* en 1887.)

1851. JACQUOT (E.), O. ✠, inspecteur général des mines en retraite.

1863. MARCUS (ADOLPHE), ✠, ancien élève de l'École polytechnique; rue des Prisons-Militaires, 20, Metz.

1863. MÉZIÈRES (ALFRED), O. ✠, A. ✠, membre de l'Institut (Académie française), professeur de littérature étrangère à la Sorbonne; boulevard St-Michel, 57, à Paris.

1894. MICHEL (ÉMILE), membre de l'Institut (Académie des Beaux-Arts), peintre, avenue de l'Observatoire, 9, à Paris. (*Titulaire* depuis 1850.)

Digitized by Google

1900. PAQUET D'HAUTEROCHE (René), au Rucher, Woippy (Lorraine.)
1897. SCHEIL (Le Révérend Père N.), Professeur d'Assyriologie, au Collège de France (Paris).
1898. SCHUSTER (Aimé) ex-professeur de physique et ancien bibliothécaire de la ville de Metz, rue du Palais, 1, Metz. (Titulaire 1873.) Agrégé 1877.
1894. WOLF (C.), ✻, membre de l'Institut (Académie des sciences), astronome à l'Observatoire de Paris.

Membres titulaires.

MM.

1900. BARTHÉLEMY (l'abbé Adolphe), curé de Hayes, par Landonvillers (Lorraine).
1897. CHOPPÉ, Directeur à la Banque de Metz, Metz.
1897. CODBAT, ✠ (C. de P.) ex-architecte-voyer de la ville de Metz, rue Saint-Louis, 11, Metz.
1898. COLLIN (l'abbé H.-D.), chanoine honoraire, directeur du *Lorrain*, Metz, 14, rue des Clercs.
1896. COLON (Eugène-François), directeur de la société La Messine, place Saint-Louis, 12, Metz.
1901. FORET (Roget-Joseph), avocat-avoué, Metz, rue de l'Esplanade, n° 2.
1874. FRIREN (l'abbé), chanoine honoraire, Aumônier de l'Orphelinat de Sainte-Constance, 41, rue de l'Évêché, Metz.
1888. GREFF (Fr.-Eug.), 4, rue des Prisons-Militaires, Metz.
1884. HUBER (Emile), ✻, ingénieur civil, à Sarreguemines (Lorr.). (*Correspondant* en 1870).
1877. JACQUEMIN (Remy), ✻, architecte, avenue Serpenoise, Metz.
1881. LAMAILLE, président honoraire du Comice agricole de Metz
1877. LAMETZ, ingénieur civil, rue Sainte-Marie, 16, Metz.
1898. LAMY, ✠, député au Landesausschuss, agriculteur-viticulteur à Vic-sur-Seille (Lorr.).
1900. MARET (Henri), Docteur en médecine à Metz, quai Félix Maréchal.

Digitized by Google

1887. MASSING (Camille), ingénieur civil, à Puttelange (Lorr.).
1875. MAURICE, géomètre, à Sainte-Ruffine (Lorr.).
1875. PANGE (le comte Maurice de), au château de Pange (Lorr.).
1891. PAULUS (l'abbé Et.-Eugène), Directeur de la Bibliothèque et des archives municipales à Metz.
1900. PELT (l'abbé J.-B.), Supérieur du Grand-Séminaire.
1899. PIERSON (Louis), à Ay (Lorraine).
1899. PREVEL, directeur du Crédit Coopératif de Lorraine, rue Serpenoise, Metz.
1875. SAULCY (Félicien de), membre de la Société entomologique de France, rue Châtillon, 3, Metz.
1898. SCHANTÉ, pharmacien, rue de la Tête-d'Or, Metz.
1888. SCHLINCKER (A.), maître de forges à Creutzwald (Lorr.). (*Correspondant* en 1881).
1877. SIMON (Léon), A ✻, peintre, rue du Moyen-Pont, Metz. (*Agrégé-Artiste* en 1873).
1897. THORELLE (l'abbé), curé de Lorry-Mardigny (Lorr.).
1888. TINSEAU (Valéry de), rue Jurue, 29, Metz.
1871. VIANSSON (Louis), ✻, à Fillières (Meurthe-et-Moselle).
1893. VILLEROY (Ernest), directeur de la faïencerie, à Vaudrevange (Prusse).
1896. WENDEL (Henri de), maître de forges, à Hayange (Lorr.).

Associés-libres non résidants.

MM.

1887. ANTOINE, (*Agrégé-cultivateur* en 1873; *titulaire* 1875). trésorier-payeur-général à Nîmes (Gard).
1896. BOUCHEZ (Armand-Maurice), à Cattenom (Lorr.).
1896. BOURGEAT (l'abbé), chanoine honoraire, Supérieur du Petit Séminaire, Montigny-lès-Metz.
1881. COETLOSQUET (le baron Maurice du), à Rambervillers (Vosges).
1900. FERREZ (Eugène), ancien principal clerc de notaire, rue Torricelli, 11, Paris. (*Titulaire* depuis 1879.)
1877. GANDELET (le comte Albert), camérier secret, rue d'Alliance, 5, à Nancy.
1881. GARGAN (Charles de), au château de Preisch.
1873. GILBRIN, docteur en médecine, rue de Strasbourg, 87, à Nancy.

Digitized by Google

1878. GURY (ALPHONSE), ancien pharmacien ; rue de la Planche, n° 2, à Paris.
1895. HAAS (BERNARD-AUG.), docteur en médecine, à Onville (Meurthe-et-Moselle). (*Titulaire* 1888.)
1864. HANRIOT (CHARLES), ✠, I. ✠, ancien inspecteur d'Académie ; à Troyes.
1898. INGOLD (l'abbé), directeur de la *Revue d'Alsace* à Colmar (Alsace).
1864. JACQUET (AUGUSTIN), A. ✠, docteur ès-lettres, professeur de rhétorique au lycée Louis-le-Grand ; 88, rue Claude-Bernard, à Paris.
1896. LADOUCETTE (ETIENNE DE), place Vendôme, 8, à Paris.
1895. MARGUERIE (marquis DE), à Saint-Epvre (Lorraine).
1858. MAUROUARD, O. ✠, inspecteur général des poudres et salpêtres, chef de service au ministère de la guerre, rue d'Argenson, 1, à Paris.
1900. MEILHEURAT (H.) officier de l'instruction publique, licencié ès-sciences mathématiques, ancien professeur, rue de Paris, 68, à Moulins (Allier).
1856. PETRE (CHARLES), A. ✠, statuaire, directeur de l'École régionale des beaux-arts à Bourges (Cher).
1868. RIOLACCI (J.-D.-P.), O. ✠, médecin-major de première classe au 11e régiment d'infanterie.
1851. STRATEN-PONTHOS (le comte VAN DER), Bruxelles, 23, rue de la Loi.

Agrégés.

MM.

1897. BLIND, vétérinaire à Guebwiller (Alsace).
1899. DASSENOY (PAUL), électricien à Metz.
1878. DUJARDIN (A.), sculpteur de la Cathédrale, à Metz.
1883. THIRIOT, professeur de musique, rue Mazelle, 19, à Metz.

Correspondants.

MM.

1886. ADAM (LUCIEN), ✠, président de chambre, à Rennes.
1889. ANCEL (CHARLES RENÉ), fabricant de produits chimiques, à Rosières-aux-Salines (Meurthe-et-Moselle).

Digitized by Google

1896. BARDY, pharmacien honoraire, à Saint-Dié (Vosges).
1893. BARTHÉLEMY (François), archéologue, 61, rue de Rome, à Paris.
1902. BEAUPRÉ (Jules, comte), 18, rue de Serre, à Nancy.
1878. BERTRAND (l'abbé Louis), professeur au grand Séminaire de Bordeaux (Gironde).
1878. BOYÉ (Bernard-Arthur-Pierre), A. ✱, I. ✱, avocat à la Cour d'appel de Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1882. BOSMANS (l'abbé J.), secrétaire-archiviste du Cercle archéologique d'Enghien (Belgique).
1899. BOULAND, docteur, 95, rue de Prony, à Paris.
1901. BOURGEOIS (Jules), entomologiste à Sainte-Marie aux-Mines (Alsace).
1878. BUZY, professeur au lycée de Sens (Yonne).
1873. CLÉRY (Adrien ROBINET de), ✱, ✱, 20, rue du Cloître N.-D., à Paris.
1883. COLLIGNON (Dr. René), médecin-major au 25e de ligne, 42, rue de la Marine, à Cherbourg (Manche).
1868. COLNET D'HUART (de), docteur ès-sciences, directeur honoraire à l'Athénée de Luxembourg.
1879. DENY (Edouard), ingénieur civil, fondé de pouvoirs à la Faïencerie de Badonvillers (Meurthe-et-Moselle).
1887. E. DESSENON, O. ✱, I. ✱, professeur de mathématiques au Lycée Saint-Louis, à Paris, rue des Grands-Augustins, 20.
1866. FROMONT (Auguste), homme de lettres, à Lille.
1890. GENAY (Paul), président du comice agricole de Lunéville, membre de la société nationale d'agriculture de France, à Bellevue, près Lunéville.
1881. GERMAIN (Léon), A. ✱, I. ✱, secrétaire perpétuel de la Société d'Archéologie lorraine, 26, rue Héré, à Nancy.
1894. GODIN (Oscar), directeur-gérant de la Société des mines de Sarre et Moselle, à Carling.
1885. GOY (Paul de), licencié-ès-sciences mathématiques, à Zédrevaux, par Rémilly (Lorraine).
1901. GOY (baron Pierre de), résident de France à Qui-nhon (Annam).
1886. HANNAUX (Emmanuel), A. ✱, ✱, artiste sculpteur, rue Bonchard de Saron, 8, à Paris.
1901. HOULLIER (abbé A.) curé de Fins (Somme).

Digitized by Google

1895. JEANTY (Eugène), négt à Sarreguemines (Lorraine).
1899. KIEFFER (Mlle Jeanne), 44, avenue de Clichy, à Paris.
1891. KNŒPFLER, chef de clinique à la faculté de médecine de Nancy, faubourg St-Georges.
1861. LACRETELLE (Henri), homme de lettres ; rue du Colisée, 19, à Paris.
1860. LE GENTIL, Château-St Michel près Arras.
1864. LÉVY (Isaac), rabbin, à Bordeaux.
1895. LÉVY (l'abbé Joseph), curé à Lorentzen (Alsace).
1896. MARGOT (Charles), préparateur de physique à l'Université de Genève.
1873. MATHIEU (Auguste), ancien conservateur des forêts, 7, rue Trouillet, à Nancy.
1861. MILLIEN (Achille), homme de lettres, à Beaumont-la-Ferrière (Nièvre).
1894. MORCEL (Madame), propriétaire, à Vic (Lorraine).
1863. MOUGENOT (Léon), archéologue, à Malzéville près Nancy.
1898. PAX (l'abbé), curé-doyen de Glencoe, Amérique du Nord (Minnesota).
1888. PRÉAU (Ch.-Alex.-Germain), membre de diverses Sociétés d'Archéologie, 57, rue Rodier, à Paris.
1893. RICHARD D'ABONCOURT (Emmanuel de), ✠, chef d'escadron d'artillerie, à Douai (Nord).
1879. ROBERT (Ferdinand des), quai Claude-le-Lorrain, 32, à Nancy.
1866. STAAF (le colonel F.-N.), O. ✠, attaché militaire à la légation de S. M. le roi de Suède et de Norvège, place Wagram, 1, à Paris.
1878. THIRION (Maurice), docteur-ès-lettres, professeur d'histoire au lycée de Lille (Nord).
1894. VAN WERVECKE (Nicolas), professeur à l'Athénée, à Luxembourg.
1898. VIANSSON-PONTÉ (l'abbé), curé de Haucourt (Meurthe-et-Moselle).

Digitized by Google

RAPPORT

SUR LE

CONCOURS DES PRIX DE VERTU

EXERCICE 1902-1903

Au nom d'une Commission composée de MM. CHOPPÉ, COLON, FORÊT et LAMETZ, *Rapporteur*.

MESSIEURS,

J'ai l'honneur de vous informer qu'avant de prendre la plume, j'ai revu nos *Mémoires* pour y lire les discours de mes honorables prédécesseurs aux fonctions de rapporteur des prix de vertu, et de vous avouer qu'à la suite de ces lectures, je crois qu'il a déjà été brillamment exposé, devant vous, toutes les généralités que l'on peut dire sur ce sujet. En conséquence, je n'ai pas essayé de redire, avec d'autres mots, ce que vous avez déjà entendu, car je pense que l'Académie de Metz n'aime pas les discours où l'on parle pour ne rien dire.

D'ailleurs, la suppression de la publicité, par les journaux, des rapports des prix de vertu, indique, je crois, le désir de l'Académie, de voir le rapporteur être bref, peut-être parce que les circonstances font que l'Académie distribue plutôt des aumônes, qui doivent rester ignorées, que des prix de vertu qui, par essence, doivent être publiés.

Digitized by Google

Toutefois, avant de vous énumérer les prix que votre Commission vous demande d'accorder, je vous signalerai une des difficultés d'obtenir des renseignements sur les candidatures. Si on interroge les candidats, on les met quasi dans l'obligation de faire leur éloge eux-mêmes (ce qui, pour la plupart, ne les embarrasse pas) ; si on écoute leurs protecteurs, ce sont ceux-ci qui font l'éloge, et il se trouve que tous les candidats sont parfaits et ont un égal mérite.

Cependant, il a bien fallu établir, dans les récompenses, des graduations correspondant à des degrés divers dans la vertu, et prendre en considération la position sociale des candidats ; car, ne disposant pas d'une somme illimitée, il a paru convenable d'accorder davantage, à mérite égal, aux nécessiteux qu'à ceux qui sont dans une meilleure situation pécuniaire.

Permettez-moi de citer, dans le discours d'un de mes prédécesseurs, ce que vous a dit M. Ferrez, en 1896 : « Si, dans cette œuvre difficile du clas-
« sement respectif des mérites de vos candidats,
« votre Commission a pu hésiter, si elle a pu se
« tromper de quelques numéros d'ordre, c'est que
« cette Commission, ne possédant que des lumières
« humaines pour juger des œuvres, humaines aussi,
« ne pouvait prétendre, comme elle n'a prétendu,
« qu'à cette simple, mais profonde conviction de
« bonne foi, qui a suffi de tout temps, qui devra
« suffire forcément toujours, à assurer l'autorité
« de la chose jugée, sous la sauvegarde, comme
« ici, de l'honorabilité des juges. »

J'arrive à la partie essentielle de mon rapport : à la liste des propositions des récompenses que je

Digitized by Google

vais soumettre à la ratification de l'Académie; je commencerai par vous présenter les sauveteurs, qui sont des personnes dont les cœurs généreux ne peuvent s'empêcher d'admirer le courage qui les conduit à exposer, sans réfléchir, leur propre vie pour sauver celle de leur prochain.

1° M. SCHMITT, aubergiste à Thionville, qui, dans la nuit du 2 au 3 mai 1902, averti par des cris d'alarme, « au feu ! », monta au troisième étage. Il pénétra d'abord dans la chambre d'une servante, et mit celle-ci, aveuglée par la fumée, en sûreté à l'étage inférieur.

Puis il remonta tout de suite, et sauva également l'ouvrier Lang, qui avait déjà complètement perdu connaissance.

Votre Commission propose d'accorder à Monsieur Schmitt, pour ce double sauvetage, un prix de 100 Mark avec diplôme.

2° M. le Curé de Saint-Maximin a signalé à l'Académie l'héroïsme déployé pa Mme BINET dans un incendie, qui a éclaté dans la rue Mazelle, n° 25, le samedi 15 décembre dernier.

« En quelques instants, par suite d'explosion de « térébenthine, tout fut la proie des flammes. Les « époux Binet, voyant que tout était perdu, durent « sortir de ce brasier intense ; cependant, la jeune « femme Binet, sans compter avec le danger, monte « à l'étage supérieur, qui était aussi en feu, prend « dans son berceau sa petite fille, âgée de deux « ans, et la descend chez une voisine, passant de « nouveau à travers le brasier. Ne voyant pas alors « son jeune bébé, âgé de quatre semaines, elle le

Digitized by Google

« croit encore dans le feu, se précipite au milieu « des flammes et, de ses doigts crispés, elle saisit « le petit berceau, tout enflammé, le tourne et le « retourne en tous sens.

« Ne trouvant rien, et à moitié asphyxiée par « la fumée, elle veut sortir de cette horrible four- « naise, mais ne trouve plus aucune issue ; elle « fait alors quatre fois le tour de la chambre et « réussit enfin à s'échapper. Elle revient dans la « rue et retrouve son enfant, qu'une personne cha- « ritable avait sauvé dès le début de l'incendie. »

On comprend qu'une mère risque sa vie pour sauver celle de ses enfants ; c'est un sentiment si naturel, si instinctif, qu'il se remarque également chez les animaux. Toutefois, votre Commission a reconnu que l'action de Mme Binet, dont je vous ai cité le récit pathétique qui nous en a été envoyé, indiquait que cette dame possédait à un haut degré le dévouement maternel, et qu'elle méritait d'être récompensée.

Mais l'Académie, se fondant sur une décision antérieure — de ne plus donner de prix pour les actes de dévouement des parents pour leurs propres enfants — n'a pas accueilli la demande de la Commission des prix de vertu ; il ne reste à son rapporteur que l'espoir que Mme Binet trouvera dans son cœur de mère la récompense d'avoir sauvé ses enfants au péril de sa vie.

J'aborde maintenant les sauvetages des accidents causés par les chevaux et voitures.

Sur les quatre cas qui ont été signalés à la Commission, il y en a trois qui peuvent se relater dans le cliché suivant : Les chevaux d'une voiture se sont emportés et sont partis à fond de train, lors-

Digitized by Google

qu'un — ou deux — hommes courageux se sont jetés, sans hésitation, à la tête des chevaux, et sont parvenus à les maîtriser, évitant ainsi des accidents probables.

Votre Commission vous propose de décerner un prix de 50 Mark à chacune des cinq personnes dont les noms suivent :

A M. HERMSEN, agent de police à Metz,

à M. LÜDKE, aussi agent de police à Metz,

qui ont, à eux deux, arrêté un cheval emporté, le 20 mars 1902 ; fait pour lequel ils ont déjà reçu des éloges publics par M. le Président de la Lorraine ;

à M. TRITZ, agent de police à Metz, qui a arrêté, le 16 juillet 1902, un cheval emporté ;

à M. KRAPP, agent de police,

à M. RIEVEL, employé de l'octroi.

Ces deux messieurs ont coopéré, le 24 juillet dernier, pour arrêter les chevaux emportés, d'une voiture de bière.

Je terminerai par les prix de sauvetages de l'eau, qui sont les plus nombreux.

1° Le jeune Léon AGNIEL, âgé de seize ans, était en train de manger, lorsque sa sœur, qui regardait par la fenêtre (qui donne sur la Seille), lui dit qu'un enfant venait de tomber à l'eau. Alors, il se leva de table, descendit l'escalier en ôtant sa blouse, et se jeta à l'eau avec ses autres vêtements : c'est ainsi qu'il sauva le petit Georges Schers, âgé de quatre à cinq ans.

2° Le soldat WESSCH, du 20e bataillon de pionniers, arrivé peu de temps (un quart d'heure) après

Digitized by Google

la disparition, dans la Moselle, près du Pont des-Morts, du petit Haeseler, a plongé, hélas! sans succès, pour le retrouver et le sauver.

3° Mlle Thérèse Kœler, âgée de dix ans, fille de la propriétaire des bains sur la Moselle, à Thionville, sauta à l'eau, le 29 juillet dernier, et sauva le petit Welter, âgé de cinq ans, tombé accidentellement.

Pour cet acte de courage, Mlle Kœler a déjà reçu les éloges publics de M. le Président de la Lorraine.

4° Un jeune ouvrier de notre collègue, M. Huber, de Sarreguemines (lequel a eu l'obligeance de répondre à ma demande de renseignements), en se baignant, le 28 juin 1902, dans la Sarre, s'avança imprudemment et perdit pied. Heureusement, il était accompagné d'un camarade qui appela le sergent Henbeck, commandé à l'école de natation militaire, qui, sans prendre le temps de se déshabiller, se jeta à l'eau et retira le jeune imprudent.

Pour chacun des quatre sauveteurs précités, votre Commission demande un prix de 40 Mark, sans diplôme.

5° Pour Lucien Schlecht, apprenti serrurier, qui, le 26 juillet dernier, parvint à retirer du bras mort de la Moselle, à Longeville, un soldat, brosseur d'un officier, qui, en faisant baigner le cheval de son maître, se noya; Schlecht le retira, mais le soldat ne put être rappelé à la vie, l'asphyxie était complète; la Commission demande un prix de 50 Mark.

Digitized by Google

6° Au mois de septembre dernier, M. Haidecker a retiré de la Moselle la petite fille de M. Chenu, tailleur à Metz, et, quelques semaines avant, il avait sauvé un serrurier, nommé Reiss (pour le sauvetage de Reiss, M. le Président de la Lorraine a décerné des éloges publics à Haidecker).

C'est un professionnel de sauvetage : il est vrai qu'il est maître-baigneur à l'établissement Quilloué.

La Commission a pensé qu'il fallait récompenser Haidecker, pour ces deux sauvetages, par un prix de 80 Mark, avec diplôme.

7° Mialet est un sauveteur qui n'hésite pas, quoique réveillé, la nuit, en sursaut, par des cris de détresse, à se jeter en bas du lit et à courir au danger. Voici la relation, faite par la *Gazette de Lorraine* du 20 février 1902, et confirmée par MM. Moitrier, Thibesard et E. Hennequin :

« Dans la nuit de jeudi à vendredi, vers minuit, « le gardien du tir établi entre la porte Saint- « Thiébault et la porte Mazelle, fut réveillé par « des appels au secours partant de la Seille. Il se « leva aussitôt et sortit sur sa porte, pour écouter. « Comme les appels se renouvelaient et paraissaient « provenir de la rivière, il courut dans cette di- « rection.

« A une cinquantaine de mètres en amont de sa « maison, il aperçut dans l'eau un homme, se dé- « battant, prêt à couler. Sans hésiter, et malgré « le fort courant de la rivière, près de déborder, « il s'élança à l'eau et fut assez heureux pour le « ramener au bord. Aidé de sa femme, il trans- « porta l'homme dans son logement, le déshabilla, « le frictionna et le mit dans son lit.

Digitized by Google

« Pendant que la femme lui prodiguait des soins, « M. Mialet — ainsi s'appelle ce courageux sau- « veteur — courut prévenir le poste de l'octroi « ainsi que la police. L'identité du malade put ainsi « être établie, et l'on alla prévenir sa femme qui, « depuis le soir, attendait vainement son mari, « qui est agent de la douane et habite rue Coislin. « On juge de la frayeur de cette dame, lorsqu'elle « apprit que l'on venait de retirer son mari de « l'eau. Elle accourut au tir et, vers cinq heures « du matin, elle put le ramener à la maison, à « peu près remis. »

Je n'ai qu'à faire remarquer que ce sauvetage mouvementé a eu l'aide de Mme Mialet, et que les époux Mialet ont mis dans leur lit l'homme qu'ils venaient de sauver de l'eau, afin de le réchauffer et de le faire renaître à la vie.

Et ces époux, qui risquent leur vie et leur santé pour sauver leur prochain, ont cinq enfants, et ne sont pas riches.

Aussi, votre Commission estime-t-elle qu'un diplôme d'honneur et une somme de 100 Mark leur soient attribués.

Le huitième et dernier sauveteur, dont j'ai à entretenir l'Académie, est M. Jules Parisot, négociant à Beauregard, qui, le 1er mars 1902, quoique relevant de maladie, sauva, au péril de ses jours, le fermier Hantz, dont la voiture fut entraînée dans la Moselle, près de Thionville, par les chevaux, qui périrent.

M. Hantz aurait probablement subi le même sort, sans le courage de M. Parisot, qui l'a retiré de l'eau.

Digitized by Google

En raison du sang-froid et du courage déployés, à l'occasion de ce sauvetage, par M. Jules Parisot, M. le Président de la Lorraine lui a adressé des éloges publics. Votre Commission vous propose de décerner à M. Parisot un diplôme d'honneur. Si elle ne demande pas un prix d'argent, c'est qu'elle croit que la situation sociale de M. Parisot ne permet pas de lui offrir de l'argent.

Si l'Académie, qui n'a pas encore donné de médaille comme prix de vertu, pense pouvoir adjoindre ce mode de récompense, je vous demanderai, comme rapporteur, de vouloir bien accorder à M. Parisot, en outre du diplôme, une médaille de bronze grand module.

Si le rapporteur s'est trop étendu dans les détails des prix de sauvetage, c'est que le sujet s'y prête ; il sera plus laconique dans le récit des faits motivant les prix de vertu auxquels j'arrive et que je vous exposerai, classés en trois catégories.

1° *Dévouement familial.*

Les pères et mères doivent, et sont obligés par les lois, de donner l'alimentation et les soins nécessaires à leurs enfants.

Quand les enfants sont devenus grands, ce sont encore les lois qui obligent ceux-ci à pourvoir, dans la mesure de leurs moyens, aux besoins de leurs pères et mères, lorsque ceux-ci n'ont pas de moyens d'existence.

Mais ce n'est pas la simple obéissance aux lois que vous allez récompenser ; ce sont des enfants et des parents, qui ont dépassé, et de beaucoup,

Digitized by Google

les lois, que, d'ailleurs, ils ne connaissent pas, pour la plupart.

Ce sont ceux qui, de bon cœur, et sans compter les privations qu'ils s'imposaient, ont fait preuve de dévouement, d'amour filial ou paternel, pendant de longues années, qui ont supporté, sans se lasser, les récriminations, les plaintes injustes, les exigences.

Votre Commission vous propose d'accorder :

1° Deux prix de 40 Mark chacun, sans diplôme :

L'un à Mme BEYE, à Metz, âgée de vingt-cinq ans ;

L'autre à M. Emile DARDAR, à Metz, âgé de quarante ans.

2° Deux prix de 50 Mark chacun, sans diplôme :

L'un à M. Joseph DHAM, à Metz ;

L'autre à Mlle Marie HOPPE, âgée de quarante-neuf ans, à Metz.

3° Six prix de 100 Mark chacun, sans diplôme :

Le premier à Mlle Marie JUBERT, âgée de trente ans, à Scy ;

Le second à Mme veuve PUDVELLE, âge de quarante-six ans, à Metz ;

Le troisième à Mme veuve DARBOIS, âgée de trente-huit ans, à Metz, rue Chambière, 49 ;

Le quatrième à Mme Lucie GREVELDING, âgée de quarante-trois ans, à Metz, rue Saint-Clément, 4 ;

Le cinquième à Mlle JONVAUX, âgée de cinquante ans, à Metz ;

Le sixième à Mlle LYSAIS, âgée de quatre-vingt-quatre ans, à Metz, rue de l'Évêché, 44.

Digitized by Google

4° Un prix de 150 Mark, avec diplôme, à Mademoiselle Louise DENY, âgée de cinquante-un ans, à Metz, pour vingt-cinq années de soins et dévouements à sa mère, âgée maintenant de quatre-vingt-dix ans, et pour douze années des mêmes soins et dévouements à son père, aussi âgé de quatre-vingt-dix ans. Ce dernier est acariâtre, gronde et dispute sans cesse ; il n'a aucune reconnaissance pour l'abnégation de sa fille qui, ayant dépensé le peu d'économies qu'elle avait fait lorsqu'elle travaillait, ne peut plus lui fournir les douceurs d'autrefois ; maintenant, elle ne gagne plus rien, puisque tout son temps est consacré à la garde de ses vieux parents.

J'ai appelé la seconde catégorie :

Dévouements particuliers.

Ce sont ceux qui ont été faits au profit de personnes qui n'étaient pas les pères et mères, ni les enfants des gens dévoués que je vais vous citer, et pour lesquelles votre Commission demande :

Quatre prix de 50 Mark chacun, sans diplôme :

Le premier pour Mlle Maria PREVOT, âgée de trente-six ans, à Metz, qui, après avoir fidèlement soigné sa mère, morte il y a deux ans, s'est dévouée, de longues années, pour élever tous ses neveux et nièces ;

Le second pour Mlle Élise JACQUEMARD, âgée de cinquante-trois ans, à Metz, laquelle, après avoir pendant vingt-trois années, soigné sa mère, reporta son dévouement, durant huit mois, sur deux pauvres filles aveugles, à la suite de quoi Mlle Jacque-

Digitized by Google

mard devint elle-même malade et est restée infirme ;

Le troisième pour Mme Pierre MÉAU, née Marie Aippius. Cette dame, âgée de soixante-deux ans, soigne, depuis quarante années, les malades pauvres ou abandonnés, visite les infirmes, assiste les mourants, ensevelit les morts ;

Le quatrième pour Mme Élise FELLER, à Wuisse ; également dévouement aux malades de son village, depuis quarante années.

Je cite, comme particularité, que cette dame a écrit elle-même sa demande d'un prix de vertu, mais elle est contre-signée par M. A. Labroise et par M. l'abbé Jean, curé de Château-Voué.

Un prix de 80 Mark, sans diplôme, à Mlle Marguerite MULLER, âgée de vingt-six ans, à Téterchen. En moins d'un an, elle a vu mourir son père, sa mère, son frère et sa belle-sœur ; mais elle ne perd pas courage, elle recueille les deux enfants de son frère défunt.

C'est pour l'aider dans cette tâche que M. le curé de Téterchen demande un prix pour Mademoiselle Muller, dont il fait le plus bel éloge ; l'Académie se rendra aux bonnes raisons de M. le curé, en accordant à sa protégée un prix de 80 Mark.

La troisième catégorie pourrait être nommée :

Dévouement à des œuvres de charité publique

pour laquelle votre Commission demande :

1° Un prix de 200 Mark, avec diplôme, pour Mme Catherine BIEVER, en religion Sœur THÉRÈSE-JOSEPH, supérieure de l'hôpital créé par M. de Wendel, à Hayange.

Digitized by Google

La chère Sœur Thérèse-Joseph est, depuis quarante années consécutives, à Hayange ; elle sort du couvent de Peltre, et est arrivée comme institutrice. Mais elle a toujours soigné les malades et les blessés, malheureusement si nombreux dans les pays de forges et mines de fer.

Pendant l'épidémie de choléra, qui sévit à Hayange en 1868, et aussi pendant la guerre de 1870, notre chère Sœur grandit encore, si possible, son abnégation et son dévouement, et elle rendit de grands services pendant ces moments difficiles.

En accordant le prix demandé par votre Commission, vous savez d'avance qu'il servira à soulager les malades et les pauvres.

2° M. l'abbé LEBLANC a créé, il y a deux ans à peine, une maison (qu'il a aidé, de ses mains, à construire), et dont il a payé les matériaux avec l'argent qu'il ne craignait pas d'aller quêter, en personne, chez les habitants à l'aise de Garsch et des environs, votre Commission a fixé à 250 Mark le prix qu'elle vous demanderait d'attribuer à M. l'abbé Leblanc.

Comme il faut pourvoir à l'entretien d'une salle d'asile et de deux religieuses de la Providence de Saint-Jean de Bassel (dont l'une soigne les malades à domicile), c'est pour aider à cet entretien, qui incombe entièrement à M. l'abbé Leblanc, que l'Académie accordera la somme demandée (car nous savons bien où cet argent ira) et un diplôme d'honneur.

Si nous appliquons la statistique, comme l'a fait un de mes prédécesseurs, nous constatons que les

Digitized by Google

prix de vertu sont accordés seulement à deux hommes contre neuf femmes ; la même statistique, appliquée aux prix de sauvetages, qui sont récompensés cette année, renverse la proportion : alors il n'y a de prix que pour deux personnes du sexe féminin, contre treize du sexe masculin.

On pourrait en conclure que, chez les hommes, les actes héroïques se rencontrent plus volontiers, et, chez les femmes, c'est une longue patience et l'abnégation d'elles-mêmes. Toutefois, les occupations des hommes les entraînant hors du logis, ils trouvent, plus souvent que les femmes, des occasions d'opérer des sauvetages.

Digitized by Google

RAPPORT

SUR

LE LIVRE DE M. L'ABBÉ HOULLIER

PAR

M. le Chanoine H. COLLIN, Membre titulaire.

M. l'abbé Houllier, notre éminent collègue du pays d'Amiens, veut nous faire partager généreusement les gracieuses études qu'il a publiées récemment dans le *Littoral de la Somme*. Il a réuni ses articles en un fascicule de 200 pages et il envoie à l'Académie de Metz une série de dissertations fort intéressantes sur *le Jardin*.

Le titre, comme le sujet, est suggestif pour un poète, néanmoins c'est en prose que M. Houllier nous présente ses observations toujours délicates, souvent profondes, sur un ensemble de travaux, de soins et de préoccupations qu'on peut appeler vraiment le culte du jardin. Mais dans cette prose on sent le poète : ses phrases à périodes cadencées, son habitude de l'épithète choisie, son souci du coloris et de l'harmonie imitative, tout révèle un fervent disciple d'Apollon qui semble n'écrire comme le vulgaire que pour laisser reposer Pégase. On croirait même qu'il affecte la simplicité ; mais non : ce sont des pages rapidement écrites pour un journal, le journal n'est jamais si exigeant que

Digitized by Google

le livre, et on y traite toutes choses avec plus de sans-gêne. D'ailleurs cette simplicité qui n'exclut jamais la correction ni le bon goût, couvre parfois des pensées magnifiques et permet à l'auteur des envolées d'âme où le poète se retrouve en la bonne et grave compagnie du philosophe, du moraliste, du sage qui comprend son époque, qui ne redoute pas d'examiner en face et de discuter en passant, dans ce langage clair et parfois réaliste que le peuple comprend bien, les plus sérieux problèmes de son temps.

En somme ce sont de bonnes feuilles que notre collègue picard a offertes au public de son pays et après l'avoir accueilli dans notre société pour ses belles, chrétiennes et patriotiques poésies, il nous est bien agréable d'avoir à vous signaler aujourd'hui un de ses ouvrages en prose : il y fait mentir ceux qui disent que les poètes ne savent pas écrire si ce n'est en vers, et il prouve au contraire qne rien n'est plus propre à donner à un littérateur la grâce et la souplesse du style que l'habitude d'écrire des hexamètres ou de faire des sonnets. Quand on a accoutumé de plier toutes ses pensées et tous ses sentiments aux exigences de la mesure et de la rime, on acquiert pour écrire en prose une facilité extraordinaire et qui dégénérerait vite si on n'y prenait garde.

Notre confrère, du reste, n'oublie pas ce qu'il est, et les quelques vers dont il parsème certaines pages

« De l'éveil du printemps jusqu'au couchant d'été »

nous montrent, aussi bien que sa prose, un observateur qui sait lire dans les fleurs comme dans

Digitized by Google

le cœur de l'homme, manier la houe aussi bien que la plume et remonter de la nature à Dieu, l'auteur de toutes choses.

Ce livre, à vrai dire, n'est ni un manuel d'horticulture ni une étude religieuse ou sociale : c'est une longue et intéressante causerie où je trouve des leçons de jardinage très pratiques et des élévations morales très utiles à ceux qui profitent d'un jardin, nous en sommes tous, à quelque titre que ce soit, comme à ceux-là même qui le cultivent.

Après un préambule où M. Houllier célèbre d'une façon générale les charmes reposants du jardin, — c'est l'ouverture du concert qu'il va exécuter à lui seul, — il traite la question en dix-sept chapitres : chacun d'eux mériterait une mention particulière, mais je ne veux pas être long, et je signalerai simplement « le Jardin du pauvre », « le Jardin de Jenny », « le Jardin des morts » et « le Jardin emblématique ».

Le « Jardin du pauvre » est une véritable étude sociale où l'auteur examine, avec autant de cœur que de connaissance technique, la question des jardins ouvriers ; il y voit pour l'ouvrier, pour le petit employé, l'utile emploi des heures perdues et des moments libres en même temps que pour le riche le placement délicat de ses aumônes ; il trouve que l'œuvre des jardins sauvegarde la dignité humaine et facilite beaucoup le relèvement du niveau moral chez le peuple. Il éprouve une vraie jouissance à nous montrer un couple d'ouvriers, mari et femme, « qui s'en vont, bras-dessus, bras-dessous, l'un portant la bèche, l'autre, le panier ou le râteau. A cette heure ils se croient

Digitized by Google

libres et jouent aux gros propriétaires ». Cette illusion de la propriété mène à l'économie, et l'économie finit par réaliser le rêve. Et c'est ainsi que l'assistance par le travail est une aumône souvent préférable à toute autre.

A la campagne l'œuvre des jardins n'est pas inconnue, mais on est plus simpliste au village qu'à la ville ou dans la cité ouvrière. Les propriétaires ont-ils un coin de terre par trop fatigué de blé ou de betteraves, ils l'offrent d'eux-mêmes à des indigents à la condition expresse d'y faire de la pomme de terre. En Lorraine cela se pratique aussi, mais on est chez nous parfois plus exigeant, car il arrive que les propriétaires réclament une partie de la récolte ; cela s'appelle planter à moitié. Serions-nous moins généreux que les Picards ; je ne l'aurais pas cru, et pour l'honneur du nom lorrain nous favoriserons, autant qu'il sera en notre pouvoir, ce bon usage de prêter un lopin de terre à ceux qui n'en possèdent pas ; faisons même en sorte que pour les propriétaires ce soit sans espoir d'un trop fécond retour. « Il se trouve ainsi, nous dit l'abbé Houllier, que deux individus se rendent un mutuel service ; le prêteur qui retrouve, au bout de l'an, son champ en bon état de culture, et l'emprunteur qui récolte sa provision de légumes, en prenant seulement la peine de planter et de cultiver. »

Dans un autre chapitre intitulé « le Jardin de Jenny » l'auteur nous présente « une ouvrière diligente qui ne vit que d'avouable métier ». Le luxe de Jenny, le seul qu'elle se permette, c'est son jardin. « Quel mot prétentieux je viens d'écrire pour indiquer une si petite chose ! N'importe, ce

Digitized by Google

peu est la cause du bonheur d'une âme, il est donc d'un grand prix. Le jardin de notre Jenny parisienne, c'est son balcon, ou tout simplement, si balcon il y a, ce ne peut être ce motif d'architecture qui décore le palais ou la maison des grands, c'est plutôt un ruban de terrasse passant au long de la mansarde. La plupart du temps ce luxe même est interdit à la pauvrette qui se contente d'une planche en appui de fenêtre. C'est pourtant là que gît son trésor. »

Il nous montre ensuite ce que fait l'ouvrière pour ce jardin, ce qu'elle en reçoit de joie et de bonheur en retour des soins qu'elle lui donne ; nous la voyons recueillir un réséda, pauvre orphelin abandonné par sa voisine morte poitrinaire et le soigner avec un amour jaloux ; nous la rencontrons au marché aux fleurs en admiration devant un magnifique rosier qu'elle achète et qu'elle paiera en se privant, pendant un mois entier, de son café du matin. Ah ! qu'elle est heureuse ! Seule au monde, son jardin et ses fleurs lui sont un foyer et une famille.

La Jenny de province, aussi pauvre de deniers que celle de Paris, est plus riche de fleurs ; celle de la campagne est plus privilégiée encore et dans le potager qui entoure la maison, il y a toujours une plate-bande réservée pour ses fleurs ; l'hiver venu elle leur partagera sa chambre et la lumière de son unique fenêtre.

Il y a dans ces peintures un charmant réalisme ; M. Houllier n'est pas seulement littérateur et poète, il est peintre et d'une bonne école, sa touche est fine et vraie. Suivons-le au « jardin des morts ».

Ne craignez rien, Messieurs, il n'y deviendra ni

Digitized by Google

lugubre ni funèbre ; il n'y sera même ni austère ni trop sévère et il trouve trop absolue cette formule que l'on rencontre sur certaines lettres de faire-part : « Ni fleurs ni couronnes. » Il se demande d'où elle sort « à moins qu'elle ne provienne de quelque abus. Peut-être pour honorer les corps, a-t-on trop oublié les âmes ? » Et il part de là pour rappeler la supériorité de l'âme sur le corps et son immortalité ; mais il est amené aussi à se souvenir que le corps, après la mort, est confié à la terre comme une semence de résurrection, que la religion n'est pas une marâtre et que nous pouvons répandre « sur des tombes chères, des fleurs avec des larmes ».

Il termine ce chapitre par une poésie intitulée : « Sur les tombes » et où je cueille ces quelques vers :

Dans le sombre dortoir
Où sommeillent les morts, quel cuisant désespoir
N'est consolé, bercé, charmé par la présence
Des symboles vivants de la douce espérance ?
Toi, blanc lys, glorieux de ton corselet d'or,
Tu me parles, hélas ! du précieux trésor,
Qu'une mère a perdu ; tendre fille chérie,
Au parterre elle prend une nouvelle vie ;
Et la rose à son tour, reine parmi les fleurs,
Nous rappelle l'ami, les frères et les sœurs,
A notre amour ravis. De ses yeux la pensée
Nous regarde et nous dit que l'âme trépassée
Revit au sein de Dieu. Le bleu myosotis
Convie à murmurer de cœur *De profundis*.
Pourquoi donc avoir peur des fleurs et des couronnes
Qui donnent leurs parfums suaves en aumônes
Aux pauvres désolés ? Elles saturent l'air
D'effluves sains et purs qui caressent la chair ;

Digitized by Google

Dans la mort, ô mystère, elles puisent la vie
Qu'elles semblent lui rendre en gage de survie.
Une gerbe de fleurs sur de blancs ossements
Paraît les animer, rappeler des ferments
D'âme dans leur poussière : et quand l'heure suprême
Sonnera, relevé, sous un nouveau baptême
De pétales brillants comme tombés du ciel,
L'homme ira, le front haut, sous les feux d'Uriel,
Se perdre dans l'éclat de l'éternelle gloire :
Les anges près de lui chanteront sa victoire.
. . . . . .

Ces quelques vers m'amènent au dernier chapitre dont je veux vous dire un mot : « Le Jardin emblématique ». C'est une étude sur les emblèmes de fleurs. Le réséda, la pâquerette, la violette, la jonquille, le lys, le tournesol, la primevère, l'œillet, la digitale, la rose, la mauve, le pavot, le jasmin, le chèvrefeuille, le myrte, la belle-de-nuit, le bleuet, la scabieuse, la pensée, la jacinthe, l'oranger, le perce-neige, l'héliotrope, l'anémone, le muguet, l'aubépine, le myosotis et l'immortelle défilent sous nos yeux charmés comme en un cinématographe fidèle qui nous montre rapidement leurs nuances, leurs formes, leurs propriétés, leur signification ; c'est un chapitre charmant et instructif qui termine par ces quelques lignes sur l'immortelle :

« C'est elle qui va clore la liste de nos emblèmes fleuris ; elle est digne de venir après tous les autres. Outre qu'elle est riche et belle, elle a la propriété de survivre aux ruines de l'été. Sous ce rapport elle est la reine du jardin. Le chrétien en fait son symbole d'immortalité. Pourquoi la libre-pensée, matérialiste avant tout, s'en est-elle em-

Digitized by Google

parée ? Mystère que je ne veux pas expliquer.

Le fait est que cette fleur appartient uniquement à ceux qui croient en l'éternelle vie. A eux seuls de l'arborer après l'avoir cultivée par une vie de foi et d'honneur. »

J'ai fini ma brièvе analyse « du Jardin » par cette citation pour vous confesser un mouvement de jalousie. Les Académiciens de France s'appellent les Quarante Immortels ; c'est sans doute parce que la fécondité de la littérature française leur fournit le facile moyen de se perpétuer en remplaçant les illustrations disparues par les sommités qui arrivent graduellement aux cimes sereines où règnent sans conteste le beau langage et le bien dire.

Pour nous, forcément plus modestes, nous vivons surtout du passé : n'y aurait-il pas moyen de nous redonner un peu de vie et de faire comme le jardin, de renaître au printemps ? Notre société, du reste, peut être comparée à un jardin, et je me demande timidement si chacun des arbres que nous sommes ne pourrait pas d'une manière ou d'une autre s'engager à mettre quelques fruits pour l'automne dans la corbeille de la maison.

Je suis bien hardi peut-être de faire pareille proposition ; mais mon excuse est dans le livre que je vous présente ; il est si plein d'allure et de vie qu'il m'a fait pousser un bout d'ailes et que je suis parti pour vous raconter mon voyage dans les charmantes régions où m'emmenait M. l'abbé Houllier.

Puissiez-vous comme moi ne pas regretter ma promenade ?

Digitized by Google

A propos de la question posée au concours ouvert par l'Académie de Metz :

EST-IL POSSIBLE DE TROUVER UN MOYEN PRATIQUE

POUR EXTRAIRE L'ÉLECTRICITÉ DIRECTEMENT DU SOL

SANS L'INTERMÉDIAIRE DE MACHINES, ET CELA A L'IMITATION DU NUAGE ORAGEUX QUI S'EST CHARGÉ DE L'ÉLECTRICITÉ DU SOL, GRACE A LA CHALEUR HUMIDE ?

Lecture faite dans la séance de Novembre 1902 par M. Emile HUBER, membre titulaire.

Un de mes camarades d'école, ingénieur et administrateur de plusieurs sucreries à la Martinique, a parfaitement, à mon avis, ramené à des phénomènes électriques, les destructions opérées par l'éruption volcanique du mont Pelé : ce sont des phénomènes électriques, ajoute M. Liottier, qui ont incontestablement causé les convulsions observées pendant la catastrophe.

Dans la séance de l'Académie des Sciences de novembre 1902, M. Henri Moissan a développé une étude sur les gaz qui se dégagent des fumerolles du mont Pelé, à la Martinique.

Ces gaz ont été recueillis par le chef de la mission française, M. Lacroix, dans une fumerolle de la Rivière Blanche, après la terrible catastrophe du 8 mai 1902, et avant l'éruption du 30 août de la même année. Cette fumerolle dégageait *des tor-*

Digitized by Google

rents de vapeur d'eau, et ses bords étaient recouverts de soufre et de chlorhydrate d'ammoniaque ; sa température était supérieure à 400°. L'analyse des gaz recueillis a montré qu'ils étaient formés de vapeur d'eau, de traces de vapeur de soufre, d'une *petite quantité d'oxyde de carbone.* Dans différents échantillons, la quantité des gaz combustibles variait de 10 à 12 %.

M. Armand Gautier fait observer à ce sujet « que « les gaz volcaniques semblent avoir une compo- « sition à peu près identique à celle des gaz pro- « duits par la fusion du granit soumis à une très « haute température. Il doit y avoir là une action « de la *vapeur d'eau* sur *les roches ferreuses* ».

Aussitôt les tristes événements de la Martinique survenus, nous avons pu juger, d'après tous les renseignements reçus, que les phénomènes destructeurs étaient dûs, non à l'explosion d'une matière en fusion provenant du foyer central, mais à des phénomènes électriques.

Nous ne croyons point à la théorie de l'existence d'un foyer central brûlant depuis la création de la terre, sans oxygène ni fumée.

Les victimes ont succombé au milieu des nuages de vapeurs d'eau chargés d'électricité provenant des volcans ; les grandes lueurs qui ont accompagné ce phénomène étaient dues à des décharges électriques analogues à celles des terribles orages des tropiques.

Nous croyons que la petite quantité de gaz combustibles, qui devait être présente, a été pour fort peu de poids dans les résultats du feu, d'autant plus que la combustion de ces gaz n'a pas dû être facilitée par l'immense quantité de vapeurs d'eau.

Digitized by Google

Quant aux bâtiments, ils ont été secoués par un violent tremblement de terre et rasés par la foudre, mais non par la violence des courants de gaz enflammés, comme on l'a écrit.

Nous pensons que les volcans, les sources d'eaux minérales (1) sont dus à une production électrique qui se fait dans le sein de la terre. Je citerai pour exemple de production électrique, la présentation devant la langue humide de deux métaux de conductibilités différentes, par exemple de deux pièces : l'une de cuivre, l'autre d'argent ; à l'instant un courant électrique est produit et les deux pièces laissent l'impression d'un liquide salé, acide.

Supposons deux couches souterraines, de conductibilités différentes, soit une couche de minerai de fer reliée à une couche de minerai de cuivre, par un courant d'eau ; une pile électrique s'établit aussitôt, l'eau s'échauffe, des décompositions de roches se produisent, d'où eaux minérales chaudes ; ou bien les couches d'eau entrant en ébullition atteignent un nombre considérable d'atmosphères, d'où *les tremblements de terre*, les bruits souterrains, qui peuvent se terminer par une pro-

(1) Ainsi voyez les sources d'eaux minérales de l'Auvergne, celles de Vichy. Elles jaillissent, pour la plupart, à hautes températures, et, à leur sortie du sol, elles ne peuvent être bues qu'à très faibles doses, sous peine de congestions mortelles. Mises en bouteilles et expédiées, elles ne représentent que de l'eau de soude que l'on peut boire impunément : *toute leur action chimique, due aux courants électriques qui ont présidé aux décompositions des roches, est disparue.*

Les eaux de Néris ont une composition chimique insignifiante ; elles ont cependant une action énergique et violente même quand elles sont prises en bains.

Les eaux du Mont-d'Or ont une minéralisation très faible qui ne saurait expliquer leur action bienfaisante prises en bains et en inhalations.

Digitized by Google

jection de débris de roches et de vapeurs d'eau, par des canaux normalement ouverts depuis des siècles, peut-être depuis le grand cataclysme qui engendra l'état actuel de la terre et la stratification des couches. Ces soupapes de sûreté sont appelées *volcans ;* l'eau en vapeur est alors le véhicule des boues de roches et l'agent d'expulsion des redoutables foyers électriques.

Examinons *la production électrique à la surface du globe terrestre :* elle se traduit par les *orages*. Les habitants de la terre ont eu une tendance très marquée à rendre aux forces de la nature qu'ils ne pouvaient comprendre, un culte presqu'universel, et cela, sous des symboles différents : ainsi le soleil était adoré par les premiers hommes, comme source de lumière et de chaleur. Jupiter, le chef des dieux de l'Olympe, était représenté portant la foudre ; on voit ainsi l'impression que faisait, sur l'habitant de la terre, ce phénomène surnaturel : *l'orage* accompagné des éclairs et du tonnerre.

Comment se forment les orages ?

Lorsque l'air est chaud et humide, une couche mince d'eau en buée, nommée *nuage*, concentre, accumule des milliers de coups de tonnerre dont l'électricité est sortie du sol devant nos yeux qui n'ont encore pu saisir le secret du Maître (1).

(1) La sortie du sol de l'électricité pour se précipiter vers les nuages accumulateurs du haut de l'atmosphère, donne lieu à un passage d'étincelles électriques, ou de courants électriques très faibles, mais qui ne sont pas moins, malgré leur faiblesse, accompagnés de production d'une chaleur oxydante, car tout courant électrique engendre de la chaleur.

L'homme soumis à ce passage électrique, lors d'un orage, est donc congestionné dans tous ses organes : il souffre de chaleur, de malaise ; on voit également l'action électrique oxydante agir sur les matières animales et mettre en putréfaction les viandes, le lait, le bouillon, etc.

Digitized by Google

Tout ce que nous savons, c'est que par un temps sec et froid, les nuages ne se chargent pas d'électricité, ne tirent pas l'électricité du sol, et que les orages sont d'autant plus violents qu'on se rapproche des tropiques.

L'avenir est à la trouvaille de la décomposition des électricités positives et négatives du sol ; comme nous venons de le dire, le premier point pour résoudre ce problème, c'est « *d'opérer par la chaleur humide* ».

Si ce problème était résolu, nous aurions trouvé la source de chaleur, de lumière, la source du travail dynamique : un fil de cuivre tirerait du sol les forces nécessaires à la marche de nos machines.

Ajoutons que :

matière, mouvement, chaleur, lumière, électricité, tout se tient, car il a été constaté par l'analyse spectrale que la lumière du soleil et la lumière électrique sont identiques, ce qui démontre que les *matières* qui les produisent sont semblables.

Le soleil, centre de l'électricité, apporte lumière et électricité aux planètes faisant partie du *système solaire* (1).

Chacune des innombrables quantités d'étoiles est un soleil avec un système planétaire particulier à cette planète.

(1) *Une nouvelle grosse tache solaire.* Une lettre de l'abbé Moreux, de l'observatoire de Bourges, nous annonce qu'une tache solaire plus importante que la dernière signalée il y a quinze jours environ, vient d'apparaître au bord « Est » du soleil. Elle mesure 40.000 kilom. Elle causera vraisemblablement des perturbations magnétiques sur les lignes télégraphiques vers le 9 avril 1903. Il y aura aussi à redouter — d'après le même observateur — de nouvelles explosions de grisou. La dernière a coïncidé avec différents coups de grisou.

En Belgique, tous les centres miniers importants avaient pris leurs précautions.

Digitized by Google

ORIGINES

La terre a existé fort longtemps avant le *cataclysme* qui a englouti les forêts transformées, aujourd'hui, en houilles ; alors les couches de terrains se sont brusquement inclinées, d'autres se sont dressées, quelques-unes sont restées horizontales. Ce travail gigantesque n'a pu avoir lieu que par suite d'un travail électrique considérable dû au soleil.

Le déluge est sans doute provenu d'une forte marée locale, due, également, à des actions électriques solaires.

La fin de la terre pourrait survenir par suite d'une activité électrique prodigieuse qui mettrait en action l'électricité du sol, les explosions dues aux pressions extrêmes engendreraient des tremblements de terre, les volcans actuels devenant alors insuffisants pour l'expulsion des liquides mis en haute pression.

La terre deviendrait un corps privé d'habitants, comme la lune, ce qui ne changerait pas sa gravitation comme satellite du soleil ; rien ne serait changé dans le monde solaire, par suite de la disparition de l'homme et des animaux de la terre.

L'activité électrique solaire venant à se ralentir, même momentanément, les *habitants* de la terre pourraient périr par le froid.

Digitized by Google

A PROPOS DU DÉMANTÈLEMENT DE METZ

PAR

M. Eug. COLON, MEMBRE TITULAIRE

Le Club vosgien, dans son assemblée générale tenue le 29 avril 1902, s'est occupé de la porte Serpenoise. Un compte-rendu de cette séance, publié par la presse locale, nous a révélé dans notre ville l'existence d'une Société d'embellissement, près de laquelle on prétend qu'indigènes et immigrés sont d'accord pour provoquer la suppression de ce monument qualifié de voûte tournante. Une autre proposition, adoptée également, a été faite en même temps : qu'en souvenir de la défense de Metz par le boulanger Harelle, le nom de ce brave soit donné à une des nouvelles rues à établir.

J'ai pensé, Messieurs, que l'Académie ne peut rester indifférente dans cette double question ainsi soulevée, mais qu'elle devrait prendre l'initiative de propositions plus complètes, et c'est dans cet espoir que je viens vous soumettre quelques observations et propositions que m'a suggérées la délibération du Club vosgien rendue publique.

J'espère qu'il n'y aura personne à Metz pour s'opposer à l'honneur un peu tardif qu'on veut faire à Harelle, et qui se justifie par lui-même, dit le journal *Le Lorrain*. C'est une réparation que réclament les vieux Messins, qui regrettent la disparition des deux inscriptions gravées, par les soins de l'Académie, sur les pilastres extérieurs du dou-

Digitized by Google

ble passage démoli il y a quelques années, et qui précédait la voûte qu'on voudrait encore démolir.

Notre regretté collègue, M. Abel, a tenu à conserver dans nos *Mémoires* le texte de ces inscriptions qui, tout en rendant hommage au dévouement légendaire de ce courageux citoyen, obscur boulanger se comportant en héros, rappelaient la défense de la ville par le duc de Guise contre Charles-Quint en 1552.

Rien ne serait donc plus juste de donner à deux des rues qui vont être créées précisément là où ils ont accompli leurs exploits, les noms de ces sauveurs de la vieille cité. On peut y joindre celui non moins honoré de notre grand évêque, Mgr Dupont des Loges, qui a passé une grande partie de sa vie, toute d'affection et de dévouement aussi pour notre ville, dans ce même quartier. Ce ne serait du reste que reprendre un projet qui n'a pas été abandonné sans regret.

Il y a encore beaucoup d'autres Messins assez illustres, ou de bienfaiteurs de la cité, qui attendent depuis longtemps pareille distinction, et dont je fournirai plus loin une liste encore bien incomplète.

Mais j'ai hâte de donner mon avis sur l'autre question, à savoir si la belle voûte construite en 1853, par l'entrepreneur Harnist, sur les plans du génie français, doit être définitivement sacrifiée, comme le proposent le Club vosgien et d'autres encore.

Il est évident qu'en se plaçant uniquement au point de vue économique et même pratique, il n'y aurait pas à hésiter ; mais est-ce que les Messins, est-ce que l'Académie de Metz peuvent, sans un véritable serrement de cœur, s'incliner devant cette convenance plus ou moins justifiée, et subir ce

Digitized by Google

nouveau sacrifice, après celui des inscriptions qui donnaient à l'entrée de la ville une physionomie... spéciale qui nous était chère ?

Maintenant que la circulation est complètement assurée en dehors de la grande voûte, on peut au moins soutenir qu'il n'y a aucune urgence à la détruire, comme déjà on a détruit bien d'autres souvenirs et de témoins d'un autre temps qui, si on n'y prend garde, finiront par disparaître tous.

Si on a constaté la solidité et même le mérite architectural du monument, on peut affirmer que des hommes les plus compétents et les auteurs du projet de restauration arrêté en haut lieu sont d'avis contraire sur ces deux points.

Les légères lézardes, qui se sont produites lors de la construction et que nous avons toujours vues, ont été produites par le tassement des maçonneries et des terres, et si elles se sont peut-être un peu accentuées par l'allègement du poids des remparts qui viennent de disparaître, elles ne constituent aucun danger d'écroulement. On en constate bien d'autres dans nos vieilles bâtisses dont on a prédit la chute, les tours Camoufle et Saint-Livier notamment, et qui ne s'en portent pas plus mal.

Une légère restauration intérieure et un revêtement maçonné extérieur avec contre-forts, tels qu'ils ont été proposés, suffiront, avec quelques additions architecturales, pour faire accepter l'isolement actuel du monument et lui donner une solidité à toute épreuve.

Je suis partisan de toute amélioration des voies publiques, surtout à Metz où elles laissent généralement tant à désirer pour la circulation, j'en ai donné à plusieurs reprises et publiquement la preuve,

Digitized by Google

en me plaignant de l'extrême et inexplicable tolérance de nos administrations et des abus qui se produisent à cet égard ; mais ce n'est pas au point de raser des monuments intéressants qui peuvent se trouver, par-ci par-là, un peu hors d'alignement.

Ne constatons-nous pas que, surtout dans certaines villes d'Allemagne et de France : à Trèves, Francfort, Paris, Nancy, etc., on a modifié la direction, ou construit de nouvelles rues ou boulevards pour conserver, souvent dans un simple intérêt historique local, de vieilles portes de tous les âges, arcs de triomphe ou vestiges moins importants d'architecture militaire ?

Il y a lieu d'attendre, en tous cas, la réalisation des plans projetés et généralement inconnus du public, pour discuter plus sérieusement cette intéressante question et être sûr d'une solution qui ne laissera pas de regrets.

Au surplus, et en ceci je m'écarte de mon sujet, ma qualité de Messin et mon attachement à ma ville natale, ne m'empêchent pas de déplorer, à certains égards, l'agrandissement de Metz — qui nous vaut cette discussion, — comme tout accroissement de population dans les villes au détriment de celle des campagnes.

Je sais bien, Messieurs, que cette remarque est tardive et que je ne puis espérer, maintenant surtout que les grands travaux en cours d'exécution font l'admiration des habitants, rencontrer beaucoup de gens de mon avis.

L'intérêt de Metz même, comme de toutes les villes dans son cas, est peut-être aussi d'attirer à elle les étrangers, les ruraux surtout, qui n'y trouvaient plus de place ; mais je ne puis m'empêcher

Digitized by Google

de penser que leur rôle de producteurs, de cultivateurs de nos champs, comme étaient leurs pères, serait bien plus utile, étant donné l'abandon déjà trop malheureux de l'agriculture, que de venir sans cesse augmenter le nombre des consommateurs.

Cette augmentation, que je trouve inquiétante pour mon compte, de la population des villes, est le meilleur agent du socialisme dans le plus mauvais sens du mot ; et je ne vois pas qu'il y ait là tant à se réjouir du développement prodigieux de certains centres — en Allemagne surtout —.

On peut se glorifier de ce soi-disant progrès qui fait — pour les temps présents — affluer les capitaux, et créer des fortunes étonnantes, mais qui pourra bien un jour affamer les gens.

Un de nos collègues les plus écoutés publiait, dans le journal qu'il dirige et qui est pourtant dévoué à Metz, un très curieux travail statistique signé A. Coppeus de Humain qui, pour être peut-être un peu exalté dans les termes, n'en est pas moins animé d'un souffle humanitaire puissant.

En parlant de l'abandon de l'agriculture dans une partie de l'Europe, dû à l'attirance des villes toujours grandissantes, il constate que depuis un demi-siècle, en Angleterre, où le secours des machines est si adopté, la décroissance de la récolte a été de de 37 % : — en 1901, 1.311.000 ; en 1851, 2.084.000. — En Allemagne, de 1885 à 1890, 840 000 personnes ont abandonné la culture ; celle des céréales a reculé en Belgique de plus de 100.000 hectares, etc., etc. Je ne veux pas citer d'autres chiffres qui ne concernent pas le fond de mon sujet et je termine cette digression, que je vous prie de me pardonner, par cette conclusion

Digitized by Google

sous forme d'appel — de l'auteur — aux amis de l'ouvrier attiré dans les villes d'où il ne peut plus sortir.

« Créez chez vous, leur dit-il, ces œuvres fécon-« des qui attachent l'ouvrier des champs au sol « natal, qu'il ne doit jamais quitter, si ce n'est pour « marcher à l'ennemi.

« Fiers ouvriers des campagnes, réunissez-vous « sous la même bannière, et regardez avec mépris « ceux qui veulent vous attirer vers les grandes « villes, ces remueuses de fange...

« Ne regardez pas avec la résignation des vaincus « les transformations de notre siècle. Nous pa-« raîtrions comme les descendants d'une tribu dis-« parue, qu'un voyageur rencontrait assis près des « débris de son campement, contemplant d'un re-« gard découragé le train qui passait à grande vi-« tesse dans la prairie défrichée... »

L'agrandissement de Metz peut être l'occasion, — je rentre dans la suite de mon sujet, — de réparer l'oubli dans lequel sont laissés bien des Messins ou bienfaiteurs qui ont illustré et tant aimé la vieille cité.

Si elle s'est justifiée de la calomnie attribuée à Cornélius Agrippa, l'orateur de la cité, d'être une marâtre des arts, nous hésiterions à dire qu'elle a toujours rempli son devoir de bonne mère vis-à-vis au moins de quelques-uns de ses enfants les plus méritants.

On est étonné qu'ayant vu naître tant d'hommes remarquables dans toutes les carrières, elle ait si peu rappelé leurs noms à la postérité. Nous n'avons à Metz que quelques statues, dont une seule élevée à un Messin, et seulement quelques voies pu-

Digitized by Google

bliques baptisées de noms d'hommes dont plusieurs ne sont pas des compatriotes.

Je ne parle pas de la statue du maréchal Fabert que tout le monde connait, et je donne la liste, par ordre alphabétique, des seules dénominations que j'ai relevées aux coins de nos rues :

Rue d'Asfeld	Général Lasalle
Maréchal de Belle-Isle	Baron Marchant
Jardin Boufflers	Dr Félix-Maréchal
Monseigneur de Coislin	Général Paixhans
Maréchal d'Estrées	Pilâtre de Roziers
Maréchal Fabert	Général Poncelet
Goussaud	Général Richepance
Holandre-Piquemal	Ambroise Thomas.
Baron de Ladoucette	

Je ne suis pas sûr que les rues Gaudrée, Glatigny et du Pont-Moreau soient aussi à noter.

Un de nos honorables concitoyens, le père du général Putz qui a commandé l'Ecole Polytechnique, avait préparé pour le Conseil municipal, un rapport très documenté, tendant à réparer les oublis des administrations précédentes et à supprimer des dénominations n'ayant aucun sens ni raison d'être ; mais le décès de M. Putz et les événements de 1870 ont empêché la réalisation de ce projet, qui avait pourtant réuni tous les suffrages. Nos édiles, quelle que soit leur origine, ne devraient-ils pas profiter de la création des nouveaux quartiers pour reprendre cette question ; ils s'honoreraient par cette réparation souvent réclamée et qui, pour être tardive, n'en serait pas moins bien accueillie.

Aux trois noms que nous avons indiqués on en

Digitized by Google

trouverait bien d'autres dans l'histoire du vieux Metz et parmi nos contemporains, dont la renommée est connue de tous les Messins, au moins de ceux qui se sont intéressés à notre passé et à nos gloires locales.

Par exemple :

Saint Sigisbert, roi d'Austrasie (633).

L'évêque Chrodegand (VIIIe siècle).

L'évêque Wala, mort en 882 sur le champ de bataille de Remich en luttant contre l'invasion des Normands.

L'évêque Bertram, l'auteur de la charte d'affranchissement de la cité messine (1179).

Le cardinal-évêque saint Pierre de Luxembourg (1387).

Anuce Foës, médecin célèbre (1518).

L'évêque d'Aubusson de la Feuillade, fondateur de l'hôpital Saint-Georges.

Perrat et Ranconval, constructeurs de la cathédrale.

Jacomin Husson, chroniqueur (XVe siècle).

Jehan Aubrion, chroniqueur (XVe siècle).

Philippe de Vigneulles, chroniqueur (XVIe siècle), a habité une des ruelles sous la rue de l'Arsenal.

Abraham Fabert, imprimeur, père du maréchal (XVIe siècle).

Le comte de Gournay, lieutenant-général (1632).

Sébastien Leclerc, graveur (1637), dont l'Académie a fait frapper une médaille.

Jacques Leduchat, philologue (1658).

Charles Ancillon, jurisconsulte (1659).

Paul Ferry, historien (1691).

Gabriel, avocat (1698).

Digitized by Google

Dom Calmet (historien de la Lorraine et des notes sur Metz).

Antoine Louis, médecin (1723).

Comte de Custines, général en chef (1742).

Comte Emmery, sénateur et pair de France (1742).

Le marquis Barbé-Marbois, ministre (1745).

Comte Colchen, pair (1751)

Lacretelle, historien (1763).

De Tschudy, horticulteur (1764).

De Persuis, directeur de l'Académie de musique (auteur du *Carnaval de Venise,* etc.) (1769).

Le général Kellermann, duc de Valmy, beau-père de Barbé-Marbois (1770).

Parant, ministre et avocat (1794).

De Serre, ministre.

Comte Roederer, conseiller au Parlement, peu populaire à Metz.

Mory, l'auteur de *Chan Heurlin* (XVIIIe siècle).

Bossuet, qui s'est révélé à Metz.

Rabelais, qui a habité rue Jurue.

Madame Mejanès, la fondatrice de Ste-Chrétienne.

Madame de Foix de Caudalle, décédée en 1814, bienfaitrice du pays, inhumée à la cathédrale.

Vauban, ingénieur, créateur des fortifications de Metz.

Cormontaigne, son émule.

Les principales familles des Paraiges sont aussi à citer :

Les Baudoche, Chaverron, Disch, de Vry, Gournais, Bataille, Le Hungre (fondateur de la Chapelotte), Raigecourt, Louve, Reuquillon, Heu, de Lacour, etc. On y rencontre de remarquables administrateurs, et surtout de dévoués et courageux défenseurs des droits de la cité.

Digitized by Google

Dans les contemporains, citons, abstraction faite de l'élément militaire qui fournirait à lui seul une longue liste :

Ch. Abel, archéologue et historien.

Boilvin (Emile), graveur et peintre.

De Bouteiller, littérateur-historien, ancien président de notre Académie.

Daubrée, de l'Institut, ingénieur des mines.

Dupré de Geneste, numismate.

De Lemud, peintre-dessinateur.

Loredan-Larchey, publiciste et archiviste.

Maréchal (Laurent-Charles), le grand peintre messin (dont une médaille a été aussi frappée sur l'initiative de l'Académie).

Morlanne, médecin-accoucheur, fondateur de la Maternité.

Prost (Auguste), président de la Société des Antiquaires de France.

Comte de Puymaigre, homme de lettres.

A ces noms on pourrait joindre ceux de :

Paul Bezanson, Dr, maire lorrain de Metz ; Desvignes, compositeur, directeur de l'Ecole de musique ; Devilly, peintre ; Frécot, ingénieur du canal de la Marne-au-Rhin ; chanoine Fleck, linguiste et mathématicien ; Gautiez, architecte ; le docteur Lallemand ; le colonel Bouchotte ; le général comte Durutte, défenseur de Metz en 1814 ; Eug. Rolland, le pastelliste ; Caignart de Saulcy, numismate ; Silvain Sturel ; A. Terquem ; le poète Verlaine ; Woirhaye, de la Cour de cassation ; Anspach, qui a donné son nom à un boulevard de Bruxelles ; mais il est évident qu'il y aurait un choix à faire au point de vue de la popularité de ces Messins.

Ce n'est pas le moment de parler de nos célé-

Digitized by Google

brités encore vivantes ; mais quoiqu'elles puissent, au moins pour plus tard, fournir un bon contingent, laissons à d'autres le soin de les honorer si faire se peut. Ce n'est pas Metz qu'elles ont choisi pour leur champ d'action, ce n'est donc pas là, il est permis de le craindre, qu'elles seront honorées dans l'avenir, sinon dans les cœurs de quelques-uns peut-être !

Cette nomenclature demande, bien entendu, à être complétée ; j'ai confiance dans quelques-uns de nos collègues qui possèdent si bien les connaissances et les éléments nécessaires pour cela. Je ne pose ici qu'un point d'interrogation, sollicitant votre appui avec confiance, car je connais, Messieurs, vos sentiments.

Ce ne sont pas les noms qui manqueront pour remplacer tant d'appellations insignifiantes et défectueuses s'appliquant à nos rues, par exemple :

Rues Chandellerue, Caserne, Enfer, Faisan, Fonderie, Four-du-Cloître, Gendarmerie, Hache, Haye, Jardin botanique (transféré à Montigny), Montagne, Paradis, aux Ours, de la Tête-d'Or, du Therme, de la Vignotte — sans compter que la suppression de la Seille doit être suivie de celle de son nom donné à plusieurs rues et à un quai — et que le nom de Saint-Louis s'appliquant à deux quartiers très éloignés devrait être remplacé pour l'un d'eux, à cause des confusions qui se produisent ; enfin il reste quelques ruelles ou petites rues indépendantes à baptiser, et ce serait l'occasion de donner à l'une d'elles le nom d'un de ses anciens habitants, qui devrait avoir attendu moins longtemps, notre intéressant et vieux chroniqueur Philippe de Vigneulles.

Digitized by Google

Digitized by Google

PROJET
D'UN DISPOSITIF

DESTINÉ

A RÉPÉTER L'EXPÉRIENCE DE FOUCAULT

SUR UNE PETITE ÉCHELLE

PAR

M. Aimé SCHUSTER, Membre honoraire.

Depuis près de deux mois (1), l'expérience imaginée par Foucault, en 1851, pour démontrer la rotation de la terre, a réveillé l'attention publique. On l'a renouvelée solennellement, le 22 octobre dernier, au Panthéon, où elle avait déjà été faite, il y a plus d'un demi-siècle, et depuis, on l'y répète deux fois par semaine. On sait qu'elle a pour objet de prouver *matériellement*, de rendre en quelque sorte *visible* le mouvement de notre planète.

Le renouvellement de l'expérience de Foucault est dû à M. Wilfrid de Fonvielle, qui le réclama dans une séance de la Société astronomique de France, et ce sont MM. Flammarion et Berget qui ont accepté la mission de reconstituer un appareil

(1) Ces lignes ont été écrites à la fin de 1902.

Digitized by Google

à peu près semblable à celui qui avait primitivement servi en 1851, et de le faire fonctionner devant le public.

Cet appareil, comme on le sait, est un pendule d'une grande longueur, suspendu au point le plus élevé du dôme du Panthéon.

Ce pendule consiste en une boule de plomb de 28 kilogrammes, soutenue par un fil métallique de 67 mètres de long et de 0^{mm}, 72 de diamètre. Ce fil est une corde de piano donnée par la maison Pleyel et Lyon. Il est pincé, à sa partie supérieure, comme dans une filière, par une pièce métallique fixée elle-même à une poutre encastrée au sommet du dôme.

Si le pendule est écarté de la verticale, il tend à y revenir, et il effectue une série d'oscillations fort lentes, en raison même de sa longueur. Une oscillation simple dure 8 secondes deux dixièmes.

Les oscillations ont lieu dans l'intérieur d'une galerie circulaire (1), dont le centre est sur la verticale passant par le sommet de la coupole, c'est-à-dire par le point de suspension du pendule.

A l'intérieur de la galerie, et dans deux positions diamétralement opposées, sont deux petites tablettes en bois, sur chacune desquelles se trouve un petit tas de sable fin. Enfin, au centre de la galerie se trouve installé un cercle horizontal dont la circonférence est divisée de dix en dix degrés.

La boule du pendule est munie, à sa partie inférieure, d'une pointe ou *style*, dirigée dans le prolongement du fil de suspension.

---

(1) Formée par une balustrade en bois d'acajou, qui avait déjà servi à Foucault, et qui fut retrouvée par M. Nénot.

Digitized by Google

Quand le pendule oscille, ce style vient produire un sillon ou une échancrure dans les deux petits tas de sable opposés.

Si le plan d'oscillation était invariable, c'est-à-dire s'il faisait toujours le même angle avec un diamètre déterminé de la galerie, la pointe repasserait toujours par le même sillon. Mais il n'en est pas ainsi : à chaque oscillation, les tas de sable sont *entamés* peu à peu, suivant des directions voisines, mais cependant différentes, et leur échancrure augmente peu à peu d'étendue, deux sillons consécutifs sur un même tas ayant un écart d'environ 8 millimètres et demi.

Ainsi, l'orientation du plan d'oscillation semble changer. Mais ce n'est là qu'une apparence, et c'est la terre qui, par son mouvement de rotation, produit l'illusion observée. Ce sont les deux petits tas de sable qui *s'offrent,* pour ainsi dire, en des points différents, à l'attaque du style dont la boule est armée.

Dans l'hémisphère boréal, le plan d'oscillation du pendule paraît tourner dans le *sens des aiguilles d'une montre.*

Si, par la pensée, on se transporte au pôle Nord, cette rotation, purement apparente du plan d'oscillation du pendule, est très facile à concevoir. On peut même dire qu'elle s'impose forcément à l'esprit. On ne voit pas, en effet, pourquoi le plan vertical d'oscillation changerait. Car, quoique la terre tourne au-dessous du pendule, ce plan laisse toujours la même quantité de matière d'un côté comme de l'autre, celle d'un hémisphère terrestre, dont l'attraction conserve la même valeur, quand bien même ces hémisphères changeraient d'une

Digitized by Google

manière continue, la sphère terrestre étant « bissectée » suivant un méridien variable.

La torsion du fil de suspension ne change rien au résultat, comme on peut le prouver par une expérience et un appareil fort simples, décrits dans le *Traité de physique* de P.-A. Daguin (Tome I, nº 104, page 98, édition de 1855).

Cet appareil se compose d'une sorte de potence, formée de deux montants verticaux, reliés à la partie supérieure par une traverse horizontale. Cette traverse laisse passer, en son milieu, une manivelle, à laquelle est suspendu un petit pendule. Si, d'abord, on fait osciller le pendule dans un plan déterminé, et qu'ensuite on tourne la manivelle, on produit une torsion du fil de suspension ; mais on constate que la direction du plan, dans lequel se meut le pendule, ne change pas.

Ainsi, au pôle, les différents points de l'horizon tournent de l'ouest à l'est, en sens contraire des aiguilles d'une montre, mais c'est le pendule qui, lui, paraît animé d'un mouvement inverse, c'est-à-dire dans le sens même de ces aiguilles.

A l'équateur, les apparences ne seraient plus les mêmes. Si, par exemple, le plan d'oscillation coïncidait avec un méridien, il n'en sortirait pas. Car un élément de ce méridien, considéré comme une ligne droite perpendiculaire à l'équateur, ou, si l'on aime mieux, sa tangente, se déplace *parallèlement* à lui-même, et il n'y a pas de raison pour que le pendule sorte de ce plan.

Au pôle austral et dans l'hémisphère austral, on constaterait des phénomènes analogues. Seulement, à cause de la position inverse de l'observateur, le déplacement apparent du plan d'oscillation au-

Digitized by Google

rait lieu en sens inverse. Ainsi, pour un observateur qui se trouverait au pôle austral, le mouvement des différents points de l'horizon s'effectuerait dans le sens même des aiguilles d'une montre, et, par suite, le plan d'oscillation d'un pendule semblerait tourner en sens contraire.

Entre l'équateur et l'un quelconque des pôles, il y a aussi déplacement *apparent* du plan d'oscillation. Toutefois, ce déplacement ne s'explique pas d'une manière aussi simple. « Pour s'en rendre compte, dit M. Ch. Delaunay dans son *Cours d'astronomie,* il faut s'appuyer sur la *décomposition d'un mouvement de rotation en deux autres*, qu'on démontre en mécanique.

Soit M (fig. 1) un point de la terre situé entre le pôle boréal et l'équateur. Supposons que la ligne OR représente l'angle dont la terre tourne *dans un temps très court.* Concevons deux axes, l'un OM passant par le point M, l'autre OS, perpendiculaire à OM et situé dans le plan MOP. La rotation OR peut être considérée comme la résultante de deux rotations, l'une autour de l'axe OM et représentée en grandeur par OA, l'autre autour de l'axe OS et représentée par OB. Les deux longueurs OA, OB sont obtenues par la *règle du parallélogramme* qui, dans le cas actuel, est un rectangle.

La rotation autour de OS ne peut pas déterminer une déviation du plan d'oscillation. Car le pendule en M se trouve, relativement à cet axe OS, dans les mêmes conditions qu'un pendule placé à l'équateur relativement à l'axe de la terre PP'. On n'a pas à tenir compte de cette rotation.

Les choses se passent donc comme si la rota-

Digitized by Google

tion autour de OM avait seule lieu, et le pendule se comporte vis-à-vis de cet axe OM comme un pendule placé au pôle. Le plan d'oscillation semble

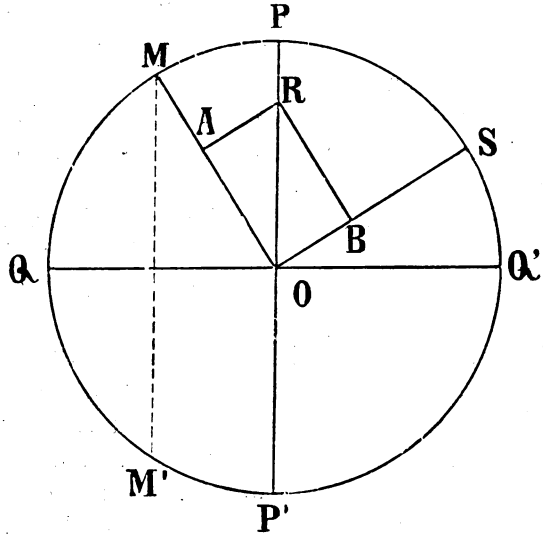


Fig. 1.

se déplacer dans le *sens du mouvement des aiguilles d'une montre,* exactement comme au pôle boréal.

Cela posé, l'angle dont le plan d'oscillation paraît tourner autour de OM est à l'angle dont la terre tourne dans le même temps, comme OA est à OR. Or on a :

$$OA = OR \cos AOR.$$

Mais AOR est le complément de la latitude QOM que nous appellerons λ. On pourra donc poser :

$$OA = OR \sin \lambda.$$

Digitized by Google

Plus la latitude λ sera petite, plus OA sera petit lui-même, plus la rotation apparente du plan d'oscillation sera lente. A l'équateur, λ est nulle, il n'y a pas de déplacement apparent du plan d'oscillation. Au pôle, $\lambda = 90^o$, $\sin \lambda = 1$:

$$AO = OR.$$

La rotation complète apparente du plan d'oscillation doit s'effectuer dans le même temps que la terre. Ces deux circonstances avaient été reconnues *a priori*.

Si l'on appelle t la fraction de jour sidéral pendant laquelle a eu lieu la rotation OR du point M, l'angle correspondant à OR aura pour mesure dans le cercle dont le rayon est l'unité :

$$t. 2\pi$$

et l'angle correspondant à OA, ou la déviation δ observée pendant le même temps sera par suite donnée par l'équation :

$$\delta = t. 2\pi. \sin \lambda.$$

A Metz, la latitude est 49° 7', à un quart de minute près. Le sinus de 49° 7' est 0,756. Le déplacement angulaire apparent du plan d'oscillation du pendule ne sera donc que les 0,756 de l'angle dont la terre tourne pendant le même temps, et il est clair que la durée d'une rotation complète apparente du plan d'oscillation sera à 24 heures en raison inverse des vitesses angulaires de ce plan et de la terre. En appelant R_p la durée de la rotation complète du plan d'oscillation, on aura :

Digitized by Google

$$\frac{R_p}{24^h} = \frac{OR}{OA} = \frac{OR}{OR \sin \lambda}$$

ou

$$\frac{R_p}{24^h} = \frac{1}{\sin \lambda} = \frac{1}{0{,}756} = 31^h\,44^m.$$

On trouve ainsi 31 heures 44 minutes, à une minute près.

Considérons un lieu dont la latitude soit 30°. Le Caire est à peu près dans ce cas. Le sinus de 30° est $\frac{1}{2} = 0{,}5$. La durée de la rotation apparente complète du plan d'oscillation sera donc :

$$\frac{R_p}{24^h} = \frac{1}{\sin \lambda} = \frac{1}{0{,}5}$$

donc

$$R_p = 48 \text{ heures.}$$

Elle sera le double de la rotation de la terre.

A Paris, la durée de la rotation serait 31 heures 47 minutes 14 secondes 6 ; le sinus de la latitude y est 0,75, la latitude ayant pour valeur 48° 50' 14" N.

Nous venons de donner une démonstration de la déviation apparente du plan d'oscillation du pendule fondée sur des notions de mécanique rationnelle, qui peuvent n'être pas présentes à l'esprit de tout le monde.

P.-A. Daguin, dans son *Traité de physique*, donne une explication du même fait, peut-être plus accessible à tous.

Digitized by Google

Soit M un point (fig. 2) de la sphère terrestre, PMP' le plan du méridien dans lequel on met en mouvement le pendule à l'origine. Soit MT la tangente en M à ce méridien. La trace du plan d'oscillation sur le plan horizontal au point M se confondra avec cette tangente. Au bout d'un temps *très court*, le point M arrive en M', et la tangente au méridien est alors M'T. Mais la trace du plan d'oscillation ne se confondra plus avec cette nouvelle position de la tangente. Il aurait fallu pour cela qu'elle fût primitivement dirigée suivant MS parallèle à M'T. Le plan d'oscillation, tendant à conserver son orientation primitive, doit paraître conséquemment avoir tourné de l'angle SMT de *l'ouest à l'est pour quelqu'un qui regarde vers le nord,* ou dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre.

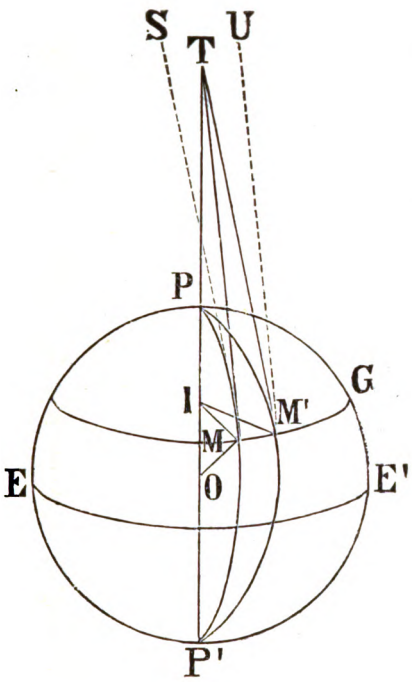


Fig. 2.

Nous avons trouvé précédemment, qu'en un

Digitized by Google

point considéré, la composante de la rotation terrestre autour de la verticale de ce point est proportionnelle au *sinus de la latitude*. La déviation apparente du plan d'oscillation du pendule en ce point est précisément égale et de sens contraire à cette rotation composante. Elle est donc aussi proportionnelle au *sinus de la latitude*. C'est là ce qu'on appelle parfois *la loi ou la règle du sinus*.

Cette règle peut se déduire aussi de la seconde démonstration que nous venons de donner du mouvement apparent du plan d'oscillation.

Considérons (fig. 3) le déplacement MM' d'un point M de la terre correspondant à un *temps très court*. La tangente MT au méridien aura pris la position M'T en tournant de l'angle conique MTM'. Mais d'après ce qui précède, la trace horizontale du plan d'oscillation, tendant à se maintenir dans une direction constante, nous admettrons que sa déviation, qui a eu lieu dans le sens des aiguilles d'une montre, est égale à l'angle conique dont la tangente MT a tourné. En appelant δ cet angle ou cette déviation, on voit que sa mesure sera :

$$\frac{MM'}{MT} = \delta.$$

Car MM', *étant très petit*, se confond avec l'arc décrit du point T comme centre, et passant par les mème points M et M'.

Mais

$$\frac{MT}{MO} = tg\,MOT \qquad \text{et} \qquad MT = MO\,tg\,MOT,$$

donc

$$\delta = \frac{MM'}{MO\,tg\,MOT} \tag{1}$$

Digitized by Google

D'autre part si l'on désigne par t le temps que met la terre à tourner de l'angle MIM', on aura :

$$t = \frac{MM'}{2\pi\, MI}; \qquad (2)$$

t est exprimé en fraction de jour sidéral.

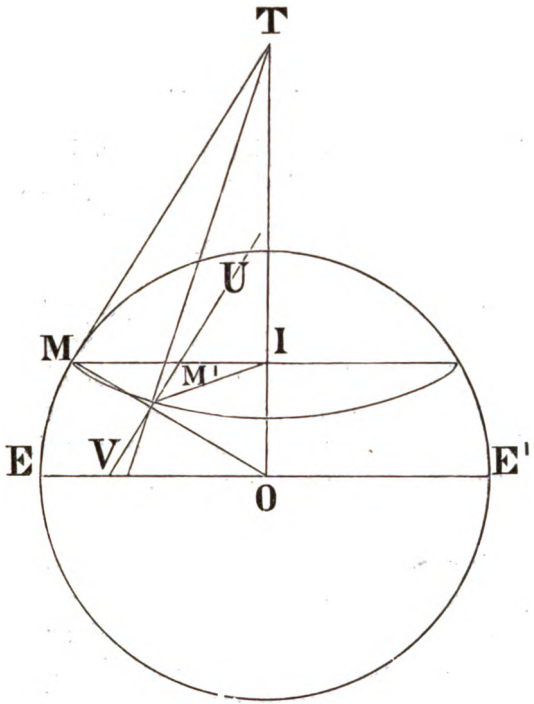


Fig. 3.

Or

$$\frac{MI}{MO} = \sin MOT,$$

Digitized by Google

donc

$$t = \frac{MM'}{2\pi\, MO \sin MOT}.$$

Remplaçons MM' par sa valeur δ MO *tg* MOT tirée de l'équation (1); il vient, après simplification :

$$t = \frac{\delta}{2\pi \cos MOT}$$

ou

$$\delta = t\, 2\pi \cos MOT.$$

Mais MOT est le complément de la latitude λ; cos MOT est donc égal à sin λ. Donc on peut écrire :

$$\delta = t\, 2\pi \sin \lambda.$$

La déviation apparente est donc proportionnelle au sinus de la latitude. Nous retombons ainsi sur la loi du sinus établie par une méthode différente.

Cette démonstration a été donnée par le mathématicien Catalan, ancien élève de l'École polytechnique, dans sa *Cosmographie*.

L'expérience de Foucault peut être faite avec des pendules de trois ou 4 mètres seulement. Toutefois le résultat est moins sensible; le déplacement apparent du plan d'oscillation est moins visible, l'arc d'amplitude étant plus petit, et le pendule s'arrête plus vite.

C'est ce qui nous a conduit à rechercher s'il ne serait pas possible de construire un appareil à *oscillations très lentes*, sans occuper pour cela un grand espace (fig. 4).

Digitized by Google

Imaginons une tige rigide, très déliée, mobile autour d'un point fixe O, et portant deux sphères identiques M et N, dont les centres sont à égale distance du point O. Il est clair qu'un pareil système sera en équilibre, quelque inclinaison qu'on lui donne en le faisant tourner autour du point O.

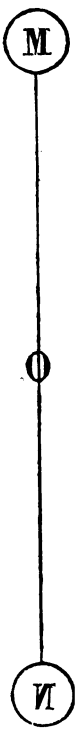


Fig. 4.

Mais supposons que la sphère N inférieure soit *un tant soit peu plus lourde* que la sphère M supérieure ; l'équilibre n'existera plus, si l'on écarte le système de la verticale. La sphère N tendra à revenir au point le plus bas, en vertu de la diférence de poids. Elle le dépassera par suite de la vitesse acquise, remontera du côté opposé, jusqu'à ce qu'elle ait perdu sa vitesse par l'action retardatrice de la pesanteur, redescendra de nouveau et ainsi de suite. Dans le même temps, la sphère supérieure exécutera des mouvements en sens contraire.

Le système effectuera donc des oscillations autour du point O. Mais il est évident que *ces oscillations seront d'autant plus lentes que l'excès du poids de la sphère N sur celui de la sphère M sera plus faible* (1). Ces oscillations auront lieu d'ailleurs dans le plan vertical passant par l'axe du système dans la position inclinée qu'on lui donne *au départ*.

Au lieu de se servir de deux sphères ayant un poids différent, on pourrait employer deux sphères

(1) On pourrait le vérifier expérimentalement.

Digitized by Google

absolument égales, mais alors en donnant à la portion ON de la tige une longueur un peu plus grande que OM. Dans ce cas encore, l'équilibre ne saurait avoir lieu entre les deux boules, puisque le poids de la boule N agirait sur un plus grand bras du levier. Le système MON, écarté de la verticale, se mettrait donc à osciller autour du point O. Mais les oscillations seraient *d'autant plus lentes que l'excès de longueur de ON sur OM serait plus faible.* On pourrait aussi constater l'exactitude de ce fait par l'expérience.

Pour rendre cette différence de longueur aussi faible qu'on le voudra, on pourrait *fileter* la partie inférieure de la tige OM et, en tournant la sphère taillée, suivant un diamètre, *en écrou,* la faire monter ou descendre d'une aussi petite quantité qu'on le voudrait. On pourrait adopter la même disposition pour l'autre sphère M, afin qu'il y ait identité parfaite entre les deux parties.

Voici maintenant (fig. 5), dans son ensemble, le dispositif dont nous proposerions *le projet.* Le système MON serait mobile autour d'un axe horizontal KOL qui lui serait exactement perpendiculaire.

Cet axe serait muni en K et en L de deux couteaux triangulaires comme ceux du fléau d'une balance de précision. Ces deux couteaux s'engageraient dans des ouvertures circulaires pratiquées dans les deux montants longitudinaux d'un cadre en métal EFGH. Ils reposeraient par leur tranchant sur la concavité inférieure de chaque ouverture circulaire.

Le cadre EFGH ne serait pas fixe, mais pour-

Digitized by Google

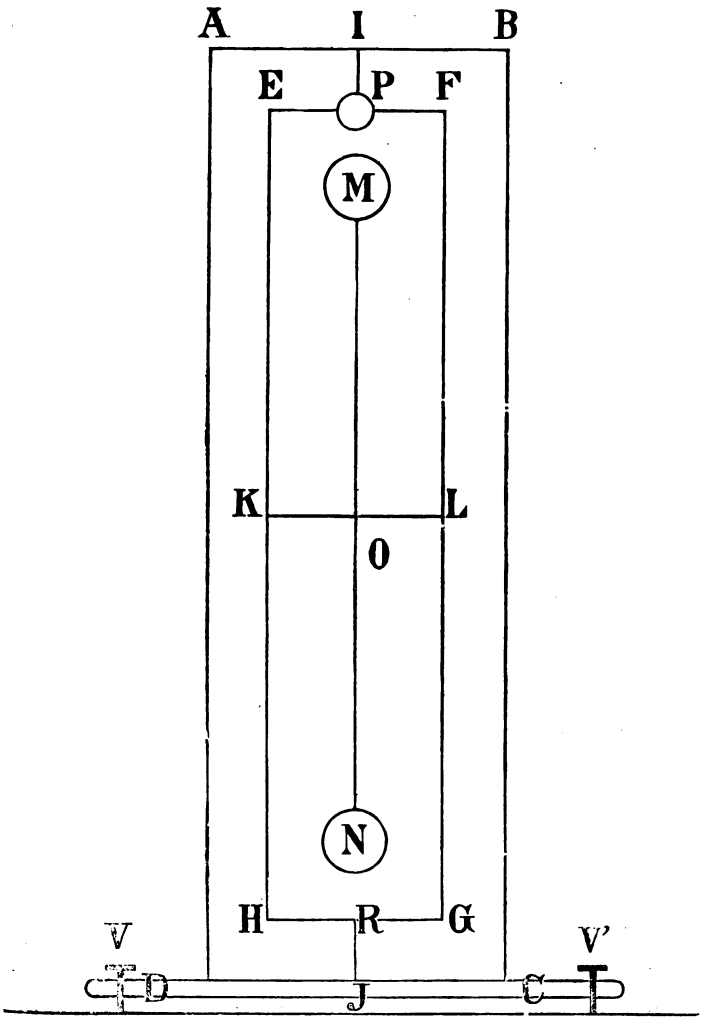


Fig. 5.

ABCD, cadre fixe.
EFGH, cadre mobile autour de l'axe IJ.
MON, pendule composé pouvant osciller autour de l'axe KOL.
M, N, sphères métalliques, la sphère N étant un peu plus lourde que la sphère M.
P, miroir placé dans le plan du cadre EFGH et tournant avec lui.
V, V', vis calantes.

Digitized by Google

rait tourner autour d'un axe vertical IJ (1). Dans ce but, il serait muni de *deux pivots* PI et RJ reçus dans des *crapaudines* correspondantes I et J. Ces crapaudines seraient pratiquées dans un cadre métallique ABCD qui, lui, serait fixe et bien vertical. En P serait fixé un petit miroir plan, dont la face réfléchissante serait dans le plan EFGH, et qui tournerait, avec le cadre mobile, autour de l'axe vertical IJ.

Les choses étant ainsi disposées, supposons qu'on écarte le pendule NOM de la verticale. Si le poids de la boule N l'emporte sur celui de la boule M, il va se mettre à osciller. Il en sera de même si, les poids des boules restant égaux, la longueur ON est plus considérable que OM.

Mais le plan d'oscillation, tendant à conserver une orientation constante, forcera le cadre mobile EFGH à tourner peu à peu autour de l'axe vertical IJ, le plan d'oscillation et le plan EFGH se maintenant perpendiculaires l'un à l'autre. Si on lance sur le miroir P un faisceau oblique horizontal de rayons lumineux, le faisceau réfléchi accusera le déplacement angulaire du miroir, et, par suite, du cadre EFGH, et, par conséquent, aussi du plan d'oscillation de MON par un déplacement correspondant de la trace lumineuse qu'il donnera sur un écran vertical. Cette sorte d'aiguille ou d'index lumineux n'augmente, du reste, en rien le poids du cadre mobile. On peut lui donner une très grande longueur, en éloignant,

(1) Cet axe doit être un axe de *symétrie parfaite* de tout le système, et laisser à droite et à gauche des parties absolument égales et également distantes.

Digitized by Google

autant qu'on le voudra, l'écran, de telle sorte que le mouvement de sa trace sur cet écran soit rendu très sensible, et c'est ainsi qu'on pourra accuser le mouvement de rotation de la terre.

Il ne nous paraît pas nécessaire de donner à l'appareil de très grandes dimensions. Une hauteur totale de I en J d'environ 2 mètres nous paraît suffisante. Le cadre fixe ABCD devra être très solide, *très massif même*, et pourvu d'une *large base à vis calantes,* qui permettent d'assurer la verticalité parfaite ainsi que celle du cadre mobile EFGH et, par conséquent, celle de l'axe IJ.

Digitized by Google

Digitized by Google

RAPPORT

CONCERNANT LE MÉMOIRE DE M. MASSING

SUR LES

NORMALES A LA PARABOLE

Par M. PAUL DE GOY

A la séance du 15 Janvier 1903.

MESSIEURS,

Je vous ai promis d'essayer de vous rendre compte d'un mémoire intitulé : *Nouveaux problèmes de géométrie analytique sur les normales à la parabole, avec solutions,* qui est l'œuvre de notre honorable collègue, M. Massing, conseiller d'État, ingénieur des arts et manufactures.

Peut-être semblerait-il, au premier abord, assez téméraire de croire que l'on puisse dire quelque chose de nouveau sur un sujet déjà autant approfondi que les coniques, et, en particulier, la parabole.

Il suffit de lire la solution du premier problème poposé au début de l'ouvrage de M. Massing, pour voir qu'il est possible d'ajouter encore plus d'un chapitre intéressant à l'étude de cette courbe.

Entrons de suite dans le vif de la question. L'auteur considère les couples de sécantes communes à une parabole donnée, dont le paramètre est égal à p, et au cercle C passant à la fois par son sommet et par les pieds A, B, C des trois

Digitized by Google

normales issues d'un point M ayant pour coordonnées x_1 y_1.

Il commence par démontrer qu'en désignant par x et y les coordonnées du centre de l'un de ces couples, on aura :

$$x_1 = p + \frac{2x(y^2 + px)}{y^2} \quad , \quad y_1 = -\frac{4x^2}{y}.$$

Puis il ajoute : Si donc le point x_1 y_1 décrit le lieu $f(x_1\, y_1) = 0$, le point x y décrira le lieu :

$$f\left(p + \frac{2x(y^2 + px)}{y^2}, -\frac{4x^2}{y}\right) = 0.$$

Ainsi, quel que soit le lieu décrit par le point x_1 y_1, on aura de suite, sans nouveau calcul, celui des centres des couples de sécantes communes au cercle C et à la parabole donnée, points que l'on désigne aussi sous le nom de pôles doubles.

M. Massing se sert également de formules, non moins générales que les siennes, qu'il emprunte à l'ouvrage du mathématicien Desboves, sur les normales aux coniques. Ce sont celles qui expriment x_1 y_1 en fonction des coordonnées α β du point N de rencontre des tangentes à la parabole menées aux pieds A et B de deux des normales, point que l'on appelle aussi le pôle de la corde AB, par rapport à la parabole.

On a :

$$x_1 = \frac{2\beta^2 - 2p\alpha + p^2}{p} \quad \text{et} \quad y_1 = -\frac{2\alpha\beta}{p}.$$

Ayant ainsi donné des formules d'une extrême généralité, l'auteur passe ensuite en revue quel-

Digitized by Google

ques exemples où elles s'appliquent. Il examine d'abord le cas où le point N, dont les coordonnées sont α et β, décrit la perpendiculaire $\alpha = p$ à l'axe de la parabole.

Les coordonnées du point M deviennent :

$$x_1 = \frac{2\beta^2}{p} \quad \text{et} \quad y_1 = -\frac{\beta}{p},$$

d'où l'on déduit $y_1^2 = 2px_1$, ce qui montre que le point M, d'où sont menées les normales, se trouve situé sur la parabole. Le lieu des centres des couples de sécantes communes à cette courbe et au cercle C, se subdivise alors en deux parties distinctes. L'une, qui correspond au point d'intersection de AB avec OM, est la directrice $2x + p = 0$ de la parabole, et l'autre, une courbe du 3e degré, ayant pour équation :

$$py^2 - 2x^2(2x - p) = 0.$$

L'auteur retrouve plus loin cette courbe au problème 8, comme étant aussi le lieu du centre d'un second cercle C' circonscrit au quadrilatère $ABMN$, lorsque le point $M(x_1\ y_1)$ décrit la directrice.

Il étudie également ce qui arrive lorsque le point $M(x_1\ y_1)$ se meut sur la développée de la parabole, de sorte que l'on a :

$$f(x_1\ y_1) = 27py_1^2 - 8(x_1 - p)^3 = 0.$$

Dans cet exemple, et dans ceux qui suivent, les solutions sont obtenues avec une facilité qui fait ressortir à la fois la puissance des formules indiquées au début de l'ouvrage, et l'habileté du calculateur.

Digitized by Google

La méthode, employée par M. Massing à la résolution des problèmes, peut se résumer en disant qu'elle consiste à se placer de suite au point culminant d'une question quelconque, en résolvant le premier le problème le plus général qui s'y rapporte, pour en déduire à volonté tous les cas particuliers, lorsque l'on descend ensuite dans le domaine des applications.

Cette méthode est excellente. Elle est de nature à aider beaucoup le lecteur à traiter les questions analogues auxquelles il voudrait répondre à son tour, en suivant la voie indiquée.

Les réflexions qui précèdent peuvent donner une idée très avantageuse de l'ouvrage que nous étudions.

Toutefois, s'il était permis de mêler quelque critique aux éloges les plus mérités, on pourrait demander pourquoi l'auteur a souvent mis les solutions moins en évidence que les problèmes auxquels elles correspondent. On pourrait peut-être lui reprocher d'être resté trop fidèle aux premiers mots du titre de son mémoire. Il semble que les résultats les plus marquants de ses calculs gagneraient parfois beaucoup à être présentés sous la forme de théorèmes dont les énoncés, se détachant entièrement du contexte, auraient l'avantage de mettre les vérités trouvées mieux en lumière.

Il conviendrait de se reporter à l'ouvrage même de M. Massing, pour étudier, avec toute l'attention qu'elle mérite, l'ingénieuse généralisation qu'il a trouvée de l'hyperbole équilatère, dite d'Apollonius, qui donne les pieds des trois normales menées d'un point à une conique, par sa rencontre avec cette courbe.

Digitized by Google

Examinons maintenant le problème 15, où M. Massing a l'air de poser diverses questions au lecteur, par là même qu'il laisse leur réponse inachevée. C'est celui où l'on suppose que le point N, dont les coordonnées sont α et β, décrit une parallèle $y = \beta = k$ à l'axe de la parabole, k désignant une quantité constante.

Cherchons, comme l'auteur semble le demander, le lieu des points de contact des tangentes menées au cercle C, parallèlement à OG. L'équation du cercle C a été donnée à la page 5. Elle est :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - (p + x_1)x - \frac{y_1}{2} = 0.$$

L'équation de la tangente en un point x' y' de ce cercle, sera :

$$xf'_{x'} + yf'_{y'} - x'f'_{x'} - y'f'_{y'} = 0.$$

Écrivons qu'elle est parallèle à OG, dont l'équation $\beta y + px = 0$ a été trouvée au problème 6.

Nous aurons la relation :

$$\frac{f'_{x'}}{p} = \frac{f'_{y'}}{\beta}$$

et en remplaçant $f'_{x'}$ $f'_{y'}$ par leurs valeurs :

$$\frac{2x' - (p + x_1)}{p} = \frac{2y' - \frac{y_1}{2}}{\beta},$$

substituant à x_1 : $\frac{2\beta^2}{p} + p^2 = \alpha$,

et à y_1 : $-\frac{2\alpha\beta}{p}$,

Digitized by Google

on trouve :

$$\frac{2x' - \left(\frac{2(\beta^2+p^2)}{p} - \alpha\right)}{p} = \frac{2y' + \frac{\alpha\beta}{p}}{\beta}.$$

En simplifiant, on a enfin pour l'équation du lieu cherché :

$$\frac{x'}{p} - \frac{y'}{\beta} = \frac{\beta^2+p^2}{p^2}.$$

On voit que c'est une droite perpendiculaire à OG. On ne s'étonnera pas de ce résultat, si l'on réfléchit que le cercle C, ayant pour corde OG, a l'un de ses diamètres perpendiculaire à cette droite, en son milieu, et que ce diamètre contient nécessairement les points de contact des tangentes parallèles à cette corde.

D'ailleurs, celle-ci reste la même en grandeur et en direction, pendant que le point $N(\alpha\beta)$ décrit la parallèle à l'axe : $y = \beta = k$, puisque son équation est indépendante de α et ne contient que β, dont la valeur reste constante. Cherchons le point où OG, c'est-à-dire $\beta y + px = 0$, rencontre la parabole $y^2 = 2px$; nous aurons :

$$px = -\beta y \quad \text{et} \quad y^2 = -2\beta y,$$

d'où :

$$y = -2\beta \quad \text{et} \quad x = -\frac{\beta y}{p} = \frac{2\beta^2}{p}.$$

On déduit de là les coordonnées du milieu de OG qui sont évidemment :

$$y = -\beta \quad \text{et} \quad x = \frac{\beta^2}{p}$$

Digitized by Google

et il est facile de vérifier qu'elles satisfont à l'équation, trouvée plus haut, du lieu des contacts. On aura donc une construction purement géométrique du lieu des contacts des tangentes menées au cercle C parallèlement à OG, en élevant une perpendiculaire au milieu de OG.

On pourrait chercher aussi le lieu des contacts des tangentes menées d'une manière analogue au cercle C' ; mais nous ne nous y arrêterons pas.

Pour avoir ces points de contact dans le cas particulier où $\alpha = p$, nous nous contenterons de remarquer que, pour cette valeur de α, les deux cercles C et C', se confondant, ont tous deux pour diamètre NM ou NG, le point M se réunissant au point G.

Le point N est connu, puisqu'il a pour coordonnées $\beta = k$ et $\alpha = p$. En prenant le milieu de NG, on aura le centre du cercle C, confondu avec le cercle C', et en le joignant au milieu de OG, on aura, par l'intersection de la droite ainsi tracée et du cercle construit sur NG comme diamètre, les points de contact formant la réponse à la question proposée.

Je bornerai ici cette étude, forcément incomplète.

J'avais l'intention, Messieurs, de terminer ce rapport en exprimant le désir de voir bientôt paraître la suite de l'ouvrage si distingué de M. Massing.

Ce vœu a été exaucé plus tôt que je ne l'espérais ; car j'ai reçu avant-hier communication d'un nouveau travail servant de complément à celui dont je viens d'avoir l'honneur de vous entretenir.

Digitized by Google

Permettez-moi de vous proposer d'insérer l'un et l'autre dans vos *Mémoires* dont ils paraissent devoir rehausser l'intérêt ; car il serait regrettable de les séparer, et la valeur du second a pour garant le mérite du premier.

Digitized by Google

AVANT-PROPOS

Dans la solution du problème suivant : « D'un point M pris dans le plan d'une parabole P, mener les normales à cette courbe. » On est amené à considérer la figure que forment : ce point M, la parabole P, le cercle C qui passe par les trois points d'incidence des normales et par le sommet de la parabole, l'hyperbole équilatère H dite hyperbole d'Apollonius, les pôles N, N', N'' des cordes de la parabole qui joignent les points d'incidence des normales et qu'on appelle les sommets du triangle normal correspondant au point M. Si on considère également les trois centres des couples des sécantes communes au cercle C et à la parabole P, on est amené à étudier les lieux géométriques que décrivent ces trois pôles doubles (dont la position dépend de celle du point M), quand ce point M se meut sur des courbes données, tracées dans le plan de la parabole P.

La recherche des lieux géométriques décrits par ces pôles doubles est intéressante, parce que ces pôles étant au nombre de trois, l'équation de ces lieux géométriques se dédouble et se détriple dans la plupart des cas, de telle sorte qu'on peut obtenir séparément soit la courbe décrite par chacun des pôles doubles, soit celle décrite par deux d'entre eux

Digitized by Google

quand ces deux se trouvent sur la même courbe. Ces décompositions d'équations du 3e degré et de degrés supérieurs au 3e, qui se présentent à chaque pas dans cette étude, offriront au lecteur de nombreux exercices de calcul. Les solutions ont été singulièrement facilitées par l'emploi de formules nouvelles qui sont des relations entre les coordonnées du point M et les coordonnées de ces trois pôles doubles.

Un autre problème non moins intéressant est celui qui consiste à chercher l'équation du lieu décrit par deux de ces pôles doubles dans certaines conditions, lorsqu'on connaît l'équation du lieu décrit par le troisième pôle double dans les mêmes conditions.

A la suite de cette étude on a placé celle des pôles doubles communs à l'hyperbole H et à la parabole P, des pôles doubles communs à l'hyperbole H et au cercle C, des pôles doubles communs à l'hyperbole H et à la parabole P'' qui passe par les points d'intersection du cercle C et de la parabole P. Cette dernière question a été traitée avec quelques détails ; elle a fait l'objet d'une nouvelle application de la méthode appliquée aux pôles doubles communs au cercle C et à la parabole P.

Outre les questions relatives aux pôles doubles, on en a traité d'autres, connexes également au problème des normales à la parabole.

Les lettres qui désignent un certain point, une certaine droite ou une certaine courbe leur restent appliquées dans tout le cours de ce travail.

Digitized by Google

NOUVEAUX PROBLÈMES

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

SUR LES

NORMALES A LA PARABOLE

AVEC SOLUTIONS

PROBLÈME 1. — On sait que les points d'incidence A, B, G des normales menées d'un point $M(x_1, y_1)$ à une parabole $P(y^2 - 2px = 0)$ se trouvent sur la circonférence d'un cercle C qui passe par le sommet O de cette parabole.

Soient x et y les coordonnées du centre d'un des couples de sécantes communes à la circonférence C et à la parabole P. On demande d'exprimer les coordonnées x_1 et y_1 du point M en fonction de x et y. Si donc $f(x_1, y_1) = 0$ est l'équation d'un lieu quelconque décrit par le point M, en remplaçant dans cette équation x_1 et y_1 par leur valeur en fonction de x et y, on aura l'équation du lieu R décrit par les centres des couples de sécantes communes à la circonférence C et à la parabole P, quand le point M décrira le lieu $f(x_1, y_1) = 0$.

Digitized by Google

L'équation du cercle C qui passe par les points d'incidence des normales menées d'un point M quelconque dont les coordonnées sont x_1, y_1 à la parabole $y^2 - 2px = 0$ et par le sommet de cette parabole, est :

$$(C)\ x^2 + y^2 - (x_1 + p)\,x - \frac{y_1}{2}\,y = 0.$$

L'équation générale des coniques qui passent par les points d'intersection de ce cercle et de la parabole est :

$$(S)\ x^2 + (1+\lambda)\,y^2 - (p + x_1 + 2p\lambda)\,x - \frac{y_1 y}{2} = 0.$$

Les équations qui donnent les centres des trois couples de droites compris dans cette équation sont :

$$\text{(a)}\ \ 2x = 2p\,(1+\lambda) + x_1 - p$$

$$\text{(b)}\ \ 2\,(1+\lambda)\,y = \frac{y_1}{2}$$

$$\text{(c)}\ \ [2p\,(1+\lambda) + x_1 - p]\,x + \frac{y_1}{2}\,y = 0.$$

on en déduit : $1 + \lambda = -\dfrac{x^2}{y^2}$

$$\text{(d)}\ \ x_1 = p + \frac{2x\,[y^2 + px]}{y^2}$$

$$\text{(e)}\ \ y_1 = -\frac{4x^2}{y}$$

Si donc le point x_1, y_1 décrit le lieu : $f(x_1, y_1) = 0$, le point (x, y) décrira le lieu $f\left(p + \dfrac{2x\,(y^2 + px)}{y^2},\ -\dfrac{4x^2}{y}\right) = 0$. Il suffira, pour avoir l'équation du lieu décrit par le point dont les coordonnées sont x, y, de remplacer dans l'équation $f(x_1, y_1) = 0$, x_1 et y_1 par leur valeur exprimée en fonction de x et de y.

Digitized by Google

Remarque. — Le problème 1 peut se poser sous la forme suivante : On se propose : 1° de chercher pour une position déterminée du point M (x_1, y_1) le lieu des centres de toutes les coniques (S) qui passent par les points d'intersection du cercle C et de la parabole P; 2° de déterminer sur ce lieu des centres les trois pôles doubles, communs au cercle C et à la parabole P, qui se trouvent sur ce lieu des centres.

(On appelle ***pôle double*** le point de concours des deux droites qui constituent un couple de sécantes communes à deux coniques.)

Le lieu des centres de toutes les coniques (S) est donné par l'équation :

$$(H)\ 4xy + 2(p - x_1)\,y - py_1 = 0.$$

Ce lieu est une hyperbole équilatère. Les trois pôles doubles se trouvent à l'intersection de cette hyperbole équilatère (H) et de la parabole :

$$(e)\ 4x^2 + y_1\,y = 0.$$

On arrive à ce résultat au moyen des trois équations (a) (b) (c) indiquées dans la solution du problème 1.

PROBLÈME 2. — Si le point M (x_1, y_1) décrit la droite représentée par l'équation $Ax + By + C = 0$, quel sera le lieu géométrique décrit par les pôles doubles (x, y) communs au cercle C et à la parabole P?

Digitized by Google

Examiner 1° le cas particulier où A est nul, c'est-à-dire où le point M décrit une parallèle à l'axe de la parabole P; 2° le cas où la droite $Ax+By+C=0$ est normale à cette parabole.

Dans le cas général, c'est-à-dire quand on a A, B, C différents de zéro, le lieu géométrique des pôles doubles communs à la parabole P et au cercle C sera représenté par l'équation :

$$(1) \quad [A(2x+p)+C]y^2 - 4Bx^2y + 2Apx^2 = 0.$$

On arrive de suite à cette équation en remplaçant x_1 et y_1 par leur expression en x et y tirée des équations (d) (e), dans l'équation $Ax_1+By_1+C=0$.

L'équation de cette courbe reste du 3e degré quand on a $B=0$, c'est-à-dire quand le point M décrit une perpendiculaire à l'axe de la parabole P.

Si nous résolvons l'équation (1) par rapport à y, nous voyons qu'elle se dédouble dans deux cas :

1° Quand on a $A=0$, c'est-à-dire quand le point M se meut sur une parallèle à l'axe, l'équation du lieu des pôles doubles se réduit à la suivante :

$$y(4Bx^2 - Cy) = 0.$$

Un des pôles doubles se meut en ce cas sur l'axe de la parabole P, et les deux autres décrivent une parabole qui a pour axe la tangente au sommet de la parabole P et dont le paramètre est égal à $\frac{C}{8B}$. L'axe de la parabole P est la tangente au sommet de cette nouvelle parabole qui a également son sommet à l'origine.

Digitized by Google

2° En résolvant par rapport à y l'équation du lieu des pôles doubles on a :

$$y = \frac{2Bx^2 \pm x\sqrt{4B^2x^2 - 4A^2px - 2Ap(Ap+C)}}{A(2x+p)+C}.$$

Le trinôme en x sous le radical sera un carré parfait, si on a :

$$Ap[A^3p + 2B^2(Ap+C)] = 0.$$

En égalant à zéro le premier facteur A, on tombe sur le cas examiné précédemment :

Égaler le second facteur à zéro

$$A^3p + 2B^2(Ap+C) = 0$$

c'est exprimer la condition pour que la droite $Ax + By + C = 0$ soit normale à la parabole P.

Supposons cette condition remplie, il viendra :

$$y = \frac{2Bx^2 \pm x\left(2Bx - \frac{A^2p}{B}\right)}{2Ax + Ap + C}.$$

Si on prend le signe $+$, on aura :

$$y = \frac{x(4B^2x - A^2p)}{B(2Ax + Ap + C)} = \frac{2B^2x\left(x - \frac{A^2p}{4B^2}\right)}{AB\left(x + \frac{Ap+C}{2A}\right)}$$

On remarque qu'en vertu de la condition :

$A^3p + 2B^2(Ap+C) = 0$, on a $\frac{A^2p}{4B^2} = -\frac{Ap+C}{2A}$;

le facteur $x - \frac{A^2p}{4B^2}$ devra donc être supprimé au numérateur et au dénominateur de la valeur de y.

En prenant le signe $+$, il reste donc :

$$y = \frac{2Bx}{A}.$$

Digitized by Google

On prenant le signe —, on trouve l'hyperbole équilatère :

$$y = \frac{A^2 px}{B(2Ax + Ap + C)}.$$

L'équation du lieu des pôles doubles se dédoublera donc comme il suit :

$$[A\,[2x + p] + C]\,y^2 - 4Bx^2 y + 2Apx^2 = \frac{1}{AB}\,[Ay - 2Bx] \times [2ABxy + B\,[Ap + C]\,y - A^2 px] = 0.$$

En remplaçant C par sa valeur, l'équation de l'hyperbole équilatère devient :

$$4B^2 xy - 2ABpx - A^2 px = 0.$$

Du reste, la géométrie donnait comme faisant partie du lieu, la droite qui joint le sommet de la parabole P au point où la droite $Ax + By + C = 0$ est normale à cette parabole. En effet, pendant que le point M se meut sur cette normale, la droite qui joint le sommet de la parabole au pied G de cette normale contient toujours par construction un pôle double se trouvant à l'intersection de cette droite et de la polaire AB du point N qui joint les points d'incidence A et B de deux des normales issues du point M.

Or le point G, où la droite $Ax + By + C = 0$ est normale à la parabole P, a pour coordonnées $\left(\frac{pA^2}{2B^2}, \frac{pA}{B}\right)$; et la droite qui joint le sommet à ce dernier point est bien représentée par l'équation :

$$Ay - 2Bx = 0.$$

Digitized by Google

PROBLÈME 3. — Lorsque le point M se meut sur la parabole P elle-même, démontrer que le lieu R se composera de la directrice de la parabole P et d'un lieu Σ du 3e degré. Indiquer quel couple de sécantes communes à la circonférence C et à la parabole P aura son centre sur la directrice.

Lorsque le point M est situé sur la parabole P elle-même, la droite AB qui joint les points d'incidence des normales autres que le point M tourne autour d'un point fixe situé sur l'axe, pendant que le point M décrit la parabole. Ce point fixe est à gauche du sommet et à une distance de ce sommet égale à p. Le pôle de cette droite AB se meut alors sur une perpendiculaire à l'axe qui coupe l'axe à droite du sommet et à une distance de ce sommet égale à p. Ceci posé, cherchons, quand le point M se meut sur la parabole P, le lieu des centres des trois couples de droites qui passent par les points d'intersection de la parabole P et du cercle C. On a : $y_1^2 - 2px_1 = 0$. En substituant à x_1 et à y_1 leur valeur trouvée plus haut, on aura l'équation du lieu demandé :

$$p(2x+p)y^2 - 2x^2(4x^2 - p^2) = (2x+p)[py^2 - 2(2x-p)x^2] = 0.$$

Nous allons démontrer que la directrice $2x + p = 0$ est le lieu du point d'intersection de la corde AB et de la droite OM. (Nous savons que par hypothèse le point M est sur la parabole.) En désignant par α et β les coordonnées du pôle N de la corde AB relativement à la parabole, l'équation de AB sera $\beta y = p(x + \alpha)$. Mais nous avons $\alpha - p = 0$.

Digitized by Google

Les formules de Desboves :

$$x_1 = \frac{2\beta^2 - \alpha p + p^2}{p} \qquad y_1 = -\frac{2\alpha\beta}{p}$$

donneront $y_1 = -2\beta$. L'équation de la corde AB devient donc :

$$y_1 y + 2p(x + p) = 0.$$

L'équation de OM est :

$$x_1 y - y_1 x = 0 \quad \text{ou} \quad y_1 y - 2px = 0.$$

En égalant les valeurs de $y_1 y$ tirées de ces deux équations, on trouve l'équation de la directrice : $2x + p = 0$ pour le lieu du point d'intersection cherché.

De même on peut obtenir directement l'équation du lieu du point d'intersection des deux droites OA et BG (BM) ou de OB et AG (AM), quand le point M est situé sur la parabole P et s'est confondu avec le point G.

En désignant par x_2 et y_2 les coordonnées du point A, par x_3 et y_3 les coordonnées du point B, l'équation de OA sera $\frac{y}{y_2} = \frac{x}{x_2}$. En remplaçant x_2 par sa valeur, il viendra : $y_2 y - 2px = 0$; et, comme on a $y_2 y_3 = 2p^2$, cette équation deviendra :

$$py - y_3 x = 0.$$

La normale BG est représentée par l'équation :

$$y - y_3 = -\frac{y_3}{p}(x - x_3).$$

Digitized by Google

En remarquant que : $x_3 = \frac{y_3^2}{2p}$ et en éliminant y_3 entre l'équation de OA et celle de BG, on aura :

$$(\Sigma)\ py^2 - 2x^2(2x - p) = 0.$$

PROBLÈME 4. — Lorsque, dans le cas général, le point M décrit un lieu dont l'équation est $f(x_1, y_1) = 0$, le centre (x_c, y_c) du cercle C décrira un lieu dont l'équation sera $f(2x_c - p, 4y_c) = 0$, car $x_1 = 2x_c - p$ et $y_1 = 4y_c$.

Le cercle C est représenté par l'équation :

$$(C)\ x^2 + y^2 - (x_1 + p)x - \frac{y_1}{2}y = 0.$$

Les coordonnées x_c, y_c du centre de ce cercle sont : $x_c = \frac{x_1 + p}{2}$ $y_c = \frac{y_1}{4}$. De ces valeurs on déduit

$$x_1 = 2x_c - p\ ;\quad y_1 = 4y_c.$$

Si le point M décrit le lieu $f(x_1, y_1) = 0$, le centre du cercle C décrira simultanément le lieu :

$$f(2x_c - p,\quad 4y_c) = 0.$$

Ainsi le point $M(x_1, y_1)$ décrivant la conique :

$$f(x_1, y_1) = Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + 2Dx_1 + 2Ey_1 + F = 0,$$

le centre du cercle C décrira une conique du même genre ; car pour $f(x_1, y_1) = 0$ on a $\delta = B^2 - AC$ et pour $f(2x_c - p,\ 4y_c)$ on a $\delta = 16(B^2 - AC)$.

Digitized by Google

Si donc le point M décrit la parabole P : $y_1^2 - 2px_1 = 0$, le centre du cercle C décrira le lieu $8y_c^2 = p(2x_c - p)$, qui est une autre parabole ayant même axe que la parabole P, ayant son sommet au foyer de la parabole P et ayant un paramètre égal au huitième de celui de la parabole P.

Si le point $M(x_1, y_1)$ décrit la développée de la parabole P, le centre du cercle C décrira la parabole cubique qui a pour équation :

$$27 \times 2py_c^2 = 8(x_c - p)^3.$$

On voit que dans ce cas, si dans cette équation et dans celle de la parabole cubique $27py_1^2 = 8(x_1 - p)^3$ on attribue à x_1 et à x_c la même valeur, il y aura entre y_c et y_1 la relation : $\sqrt{2}\, y_c = y_1$.

PROBLÈME 5. — Dans le cas particulier où le point M décrit la parabole P elle-même, construire le lieu précité Σ du 3e degré au moyen du lieu que décrit simultanément le centre de la circonférence C.

Nous avons vu que, pendant que le point M décrit la parabole P donnée, le centre x_c, y_c de la circonférence de cercle C décrira simultanément la parabole qui a pour équation :

$$16y_c^2 = 2p(2x_c - p), \quad \text{d'où} \quad 4y_c = \pm\sqrt{2p(2x_c - p)}.$$

Or, l'équation du lieu Σ peut s'écrire :

$$py = \pm x\sqrt{2p(2x - p)}.$$

Digitized by Google

Si donc nous donnons à x et à x_c la même valeur, nous aurons pour y et pour y_c des valeurs correspondantes, entre lesquelles nous aurons la relation :

$$\frac{y}{4y_c} = \frac{x}{P}.$$

Cette remarque nous donne le moyen de construire par points le lieu Σ du 3e degré au moyen de la parabole :

$$4y_c = \pm\sqrt{2p\,(2x_c - p)}.$$

On construit cette parabole ; dans l'équation de la parabole, si on donne à x_c une certaine valeur, on trouve immédiatement la valeur correspondante de y_c. Au lieu de y_c, on prend $4y_c$.

Ayant $4y_c$, on trouvera immédiatement la valeur de y qui correspondra à la valeur de x_c, c'est-à-dire le point du lieu Σ qui se trouvera sur une même perpendiculaire à l'axe que le point de la parabole qui a pour coordonnées x_c et y_c, au moyen du rapport précédent : $\frac{y}{4y_c} = \frac{x}{p}$.

Le lieu du 3e degré Σ étant symétrique par rapport à l'axe de la parabole P, il suffit de construire la branche de ce lieu qui est située au-dessus de cet axe. La courbe est dirigée du côté des x positifs ; son sommet est situé au foyer de la parabole P. La tangente au sommet est perpendiculaire à l'axe, car la valeur du rapport $\frac{y}{2x - p}$ tend vers l'infini quand x tend vers $\frac{p}{2}$. La branche que nous étudions, présente un point d'inflexion au point qui a pour coordonnées : $x = \frac{2p}{3}$ $y = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}p$. On les obtient en

Digitized by Google

résolvant l'équation $y'' = 0$. Il est superflu de chercher la Hessienne de ce lieu Σ. Cette Hessienne a pour équation :

$$H = \begin{vmatrix} -24x + 4p & 0 & 4px \\ 0 & 2p & 2py \\ 4px & 2py & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } H = (p - 6x)\, y^2 + 2px^2 = 0.$$

La branche du lieu Σ que nous considérons, coupe la parabole P au point qui a pour coordonnées $x = p$ $y = +p\sqrt{2}$. Ainsi que nous avons dit, cette branche pour x infini va vers l'infini du côté des x positifs.

Cette branche ayant été ainsi déterminée, il suffit pour obtenir l'autre branche, de construire la symétrique de la première par rapport à l'axe des x qui est l'axe de la parabole P.

Le lieu Σ ne rencontre pas la développée de la parabole P, car si nous éliminons y entre les deux équations :

$$(\Sigma)\ py^2 - 2(2x - p)\, x^2 = 0$$

et l'équation de la développée :

$$27py^2 - 8(x - p)^3 = 0$$

l'équation qui donnera les abcisses des points d'intersection de ces deux courbes sera :

$$50x^3 - 15px^2 - 12p^2x + 4p^3 = (5x - 2p)^2 (2x + p).$$

Remarque. — Dans la discussion de la courbe Σ, il est intéressant de noter les différentes positions du point M sur la parabole P auxquelles correspondent des points remarquables sur cette courbe Σ. En désignant par x et y les coordonnées d'un point de la courbe Σ, et par x_1 et y_1 les coordonnées du

Digitized by Google

point correspondant M, nous avons les relations $x_1 = \frac{4x^2}{2x - p}$, $y_1 = -\frac{4x^2}{y}$ qui permettront de trouver pour chaque valeur de x et de y les valeurs correspondantes de x_1 et de y_1, ou réciproquement.

PROBLÈME 6. — Lorsque le point M se meut sur la développée de la parabole P, une des sécantes communes à la circonférence C et à la parabole P devient une tangente commune aux deux courbes au point d'incidence de la normale double. Le lieu R décrit par les centres des couples de sécantes communes, sera en ce cas un lieu du 6e. degré qui se composera de deux paraboles confondues avec la parabole P et d'une autre parabole P'. Indiquer quel couple de sécantes communes (à C et à P) aura toujours son centre sur la parabole P', et démontrer que, dans ce cas, le lieu R devait a priori comprendre deux paraboles se confondant avec la parabole P.

Si le point M décrit la développée de la parabole P, nous aurons :

$$f(x_1, y_1) = 27py_1^2 - 8(x_1 - p)^3 = 0.$$

Or, nous avons vu que si $M(x_1, y_1)$ décrit le lieu $f(x_1, y_1) = 0$, les centres des couples de sécantes communes au cercle C et à la parabole P, décriront le lieu :

$$f\left[p + \frac{2x}{y^2}(y^2 + px), \quad \frac{-4x^2}{y}\right] = 0.$$

Digitized by Google

[On remarquera que sur la figure primitive, il faut remplacer les lettres A, B par une lettre unique A ; car en ce cas B se confond avec A]. Le lieu R deviendra, en remplaçant x_1 et y_1 par leur valeur en fonction de x et de y :

$$4(y^2 + px)^3 - 27pxy^4 = 0.$$

En développant, nous aurons :

$$4y^6 - 15pxy^4 + 12p^2x^2y^2 + 4p^3x^3 = 0.$$

Le premier nombre de cette équation se décompose comme il suit :

$$4y^6 - 15pxy^4 + 12p^2x^2y^2 + 4p^3x^3 = (4y^2 + px)(y^2 - 2px)^2.$$

Ce résultat devait être prévu ; car, en nous reportant aux notations de la figure, nous voyons que les deux points A et B se confondant en un seul A, la droite AB devient tangente à la parabole P en A ; le lieu de l'intersection de la droite OG avec AB devient le lieu de l'intersection de la corde OG avec la tangente en A. (Nous allons démontrer que ce dernier lieu est la parabole P' dont l'équation est : $4y^2 + px = 0$.) Le lieu de l'intersection de OA avec BG devient le lieu de l'intersection de la corde OA avec AG, puisque B s'est confondu avec A. Or, OA et AG se coupent sur la parabole donnée elle-même au point A ; donc ce dernier lieu est la parabole P dont l'équation est $y^2 - 2px = 0$. De même, le lieu de l'intersection de la corde OB avec la corde AG devient le lieu de l'intersection de la corde OA avec AG, puisque B s'est confondu avec A. Ce second lieu est également la parabole P elle-même.

Nous allons vérifier directement que la parabole

Digitized by Google

P', dont l'équation est $4y^2 + px = 0$, est le lieu de l'intersection de la corde OG avec la tangente au point d'incidence A de la normale double. En conservant les notations précédentes, nous avons $y_2 = y_3$. Désignons par x' et y' les coordonnées du point G, nous aurons $y_2 + y_3 + y' = 0$ ou $2y_2 = -y'$. (On sait que y', y_2, y_3 sont les racines de l'équation du 3e degré :

$$y^3 + 2p(p - x_1)y - 2p^2 y_1 = 0.)$$

L'équation de la tangente en A est :

$$yy_2 = p(x + x_2) \quad \text{ou} \quad yy_2 = p\left(x + \frac{y_2^2}{2p}\right) (f)$$

celle de la corde OG est $x'y = y'x$ qui devient, en remplaçant x' par $\frac{y'^2}{2p}$: $y'y = 2px\,(g)$.

Si je remplace y_2 par sa valeur $\frac{-y'}{2}$ dans l'équation (f), cette équation deviendra :

$$\frac{y'}{2}y + px + \frac{y'^2}{8} = 0.$$

En éliminant y' entre l'équation (g) et cette dernière équation, nous aurons l'équation du lieu cherché :

$$4y^2 + px = 0$$

qui est l'équation de la parabole P'.

La parabole P' est non seulement le lieu de l'intersection de la tangente en A, point d'incidence de la normale double, menée du point M de la développée à la parabole P, et de la corde OG qui joint le sommet O au point d'incidence G de la normale simple, menée du même point M à la parabole P ;

Digitized by Google

cette parabole P' est également le lieu de l'intersection de la tangente en A, point d'incidence de la normale double et de la tangente au point d'incidence G de la normale simple, issue du même point de la développée que la normale double.

Cela résulte du calcul suivant : l'équation de la tangente en A étant $y_2 y = p(x + x_2)$, et celle de la tangente en G étant $y' y = p(x + x')$ avec $2y_2 + y' = 0$. Comme $y'^2 = 2px'$ et $y_2^2 = 2px_2$, on a :

$$4y_2^2 = y'^2 = 2px' = 8px_2, \quad \text{d'où} \quad x' = 4x_2 ;$$

remplaçant x' et y' par leur valeur en fonction de x_2 et de y_2, on a $-y_2 y = \frac{P}{2}(x + 4x_2)$. En ajoutant membre à membre les équations des deux tangentes, on trouve $x_2 = -\frac{x}{2}$. On en déduit $y_2 = p\frac{x}{2y}$. Portant ces valeurs dans l'équation $y_2^2 = 2px_2$, il viendra :

$$4y^2 + px = 0.$$

Remarque. — Si on s'était posé le problème suivant : Quand le point $M(x_1, y_1)$ décrit la développée de la parabole P, quel lieu décrira simultanément le point $N(\alpha, \beta)$? il eût suffi de remplacer x_1 et y_1 par leur valeur en fonction de α, β dans l'équation :

$$27py_1^2 = 8(x_1 - P)^3 ;$$

on eût trouvé :

$$27p^2\alpha^2\beta^2 = 2(2\beta^2 - \alpha p)^3$$

ou bien :

$$16\beta^6 - 24p\alpha\beta^4 - 15p^2\alpha^2\beta^2 - 2p^3\alpha^3 = (4\beta^2 + p\alpha)^2(\beta^2 - 2p\alpha) = 0.$$

Ce dernier produit de deux facteurs comprend le

Digitized by Google

premier membre de l'équation de la parabole P' élevé au carré et le premier membre de l'équation de la parabole P.

Il faut comparer les deux résultats obtenus en substituant dans l'équation de la développée de la parabole P à x_1, y_1, successivement les valeurs de x_1, y_1 exprimées en fonction de α, β coordonnées du point N (au moyen des formules de Desboves), et les valeurs de x_1, y_1 exprimées en fonction de x et de y coordonnées des centres des couples de sécantes communes à la parabole P et au cercle C.

Dans le traité des normales aux coniques de Desboves, on voit que, à un seul point M correspondent trois points N, soit : N, N', N'', sommets des triangles normaux circonscrits et pôles des cordes qui joignent les points d'incidence des normales issues de M. Si donc on donne l'équation du lieu décrit par le point M, et si on connaît le lieu décrit simultanément par un des trois points N (dans le cas présent, un des trois points N décrit la parabole P, soit : $\beta^2 - 2p\alpha = 0$), le premier membre de l'équation de ce dernier lieu sera un des facteurs de l'équation du lieu plus général qu'on obtiendra en remplaçant x_1 et y_1, coordonnées du point M, par leur valeur en fonction de α, β, coordonnées des points N.

Le quotient du premier membre de l'équation du lieu général par le premier membre de l'équation du lieu déjà connu du point N, donnera le premier membre de l'équation du lieu décrit par les deux autres points N' et N'', équation qui sera :

$$(4\beta^2 + p\alpha)^2 = 0.$$

Une remarque analogue s'applique, ainsi qu'on verra plus loin, aux lieux géométriques des trois

Digitized by Google

pôles doubles communs au cercle C et à la parabole P, dans le cas de la recherche du lieu décrit par deux de ces pôles doubles, quand on connaît le lieu décrit par le troisième.

PROBLÈME 7. — Lorsque le point M se meut sur la parabole P, examiner le cas où ce point vient coïncider avec un des points d'intersection de la parabole P et de la développée de cette parabole.

Démontrer que, dans ce cas, les positions correspondantes d'un pôle double commun au cercle C et à la parabole P sont les points où la directrice de la parabole P coupe la parabole P'.

Si, en décrivant la parabole P, le point M se confond avec un des points où cette parabole est rencontrée par sa développée, les positions du pôle double (x, y), qui correspondent à ces deux positions du point M, se trouveront à l'intersection des deux lieux géométriques que décrit ce pôle double, premièrement quand M se meut sur la parabole P, et secondement quand M se meut sur la développée de cette parabole. Ces points d'intersection sont donc ceux où la parabole P' est coupée par la directrice de la parabole P et ont pour coordonnées :

$$\left(x = -\frac{p}{2}\,;\quad y = \pm\frac{P}{2\sqrt{2}}\right).$$

Pour ces positions du point M :

$$\left[x_1 = 4p\,;\quad y_1 = \pm 2p\sqrt{2}\right]$$

la sécante AB est devenue tangente en A à la pa-

Digitized by Google

rabole P, et le point M s'est confondu avec le point G.

Remarque. — Dans le quadrilatère Q ayant pour sommets les trois points d'incidence A, B, G des normales menées du point $M(x_1, y_1)$ à la parabole P et le sommet O de cette parabole, la corde AB est une sécante commune au cercle C et à la parabole P. L'équation de la seconde sécante OG, commune à ces deux courbes et formant avec AB un couple de sécantes communes à la circonférence C et à la parabole P, sera : $\beta y + px = 0$.

La corde OG joint le sommet O de la parabole P au pied de la normale MG et fait avec l'axe de cette parabole le même angle que celui de la corde AB avec ce même axe, mais de signe contraire ; car, en vertu d'une propriété connue, cet axe est la bissectrice de l'angle que font entre elles les deux sécantes AB et OG, communes au cercle C et à la parabole P. La droite AB ayant pour coefficient angulaire $\frac{+p}{\beta}$, la corde OG aura pour coefficient angulaire $\frac{-p}{\beta}$ et pour équation : $\beta y + px = 0$.

PROBLÈME 8. — Soient x et y les coordonnées d'un des trois pôles doubles communs au cercle C et à la parabole P, correspondants à une position du point M dont les coordonnées sont x_1 et y_1. Cette position du point M variera en même temps que celle du pôle double (x, y), en vertu des formules qui lient les coordonnées de ces deux points.

1° On donne l'équation $y - k = 0$ d'un lieu décrit

Digitized by Google

par ce pôle double, et on demande : *a*) l'équation du lieu correspondant décrit simultanément par le point M (x_1, y_1) ; *b*) celle du lieu décrit par les deux autres pôles doubles ;

2° Même question, lorsque le lieu décrit par le pôle double (x, y) est représenté par l'équation $x - k = 0$; lorsqu'il est représenté par l'équation $y - \delta x = 0$; enfin, lorsqu'il est représenté par l'équation $y^2 - 2kx = 0$.

1er Exemple. — Le premier pôle double (x, y) décrivant la droite $y - k = 0$, on trouvera que le point M décrit la parabole (q) :

$$(q) \quad [py_1 + 2k(x_1 - y)]^2 + 4k^3 y_1 = 0.$$

Le point M décrivant la parabole représentée par cette dernière équation, on obtiendra l'équation du lieu décrit par les trois pôles doubles communs au cercle C et à la parabole P, en remplaçant dans l'équation (q) x_1 et y_1 par leur valeur en fonction de x et de y (formules du problème 1). On trouve ainsi l'équation ζ :

$$(\zeta) \quad 4x^2(y - k)[p^2(y - k)x^2 - 2kpy^2x + k^2y^3] = 0.$$

Après la suppression du facteur $4x^2$, cette équation ζ se décomposera en deux autres équations dont la première $y - k = 0$ représentera le lieu donné, décrit par le premier pôle double, et dont la seconde :

$$p^2(y - k)x^2 - 2kpy^2x + k^2y^3 = 0$$

représentera la courbe décrite par les deux autres pôles doubles.

Digitized by Google

Si le point M décrit la parabole représentée par l'équation (q) :

$$[py_1 + 2k(x_1 - p)]^2 + 4k^3 y_1 = 0,$$

le point $N(\alpha, \beta)$ décrira un lieu dont l'équation se décomposera comme il suit :

$$(p\alpha - 2k\beta)[p\alpha(\beta + k)^2 - 2k\beta^3] = 0.$$

Il faut examiner le cas particulier où on donnerait $k = p$.

Remarque. — Si le point N décrit la droite $p\alpha - 2k\beta = 0$, le pôle double qui est situé à l'intersection des deux droites du couple AB et OG représenté par les équations :

$$\beta y - y(x + \alpha) = 0, \qquad \beta y + px = 0$$

se trouvera sur la droite $y - k = 0$.

2me Exemple. — Supposons qu'un des trois pôles doubles communs au cercle C et à la parabole P décrive la droite $x - k = 0$. Au moyen des équations qui ont donné les formules du problème 1, on trouvera que le point $M(x_1, y_1)$ décrira en ce cas la parabole (r) :

$$(r) \quad py_1^2 - 8k^2(x_1 - p - 2k) = 0$$

qui se confondrait avec la parabole P, dans le cas où on aurait : $k = -\frac{p}{2}$.

M décrivant la parabole (r), les trois pôles décriront le lieu :

$$k^2(x - k)y^2 - px^2(x^2 - k^2) = (x - k)[k^2 y^2 - px^2(x + k)] = 0.$$

Digitized by Google

Ainsi qu'il était prévu, un des pôles doubles décrit la droite $x-k=0$. Les deux autres décrivent la courbe du 3e degré :

$$k^2y^2 - px^2(x+k) = 0.$$

Dans le cas où on aurait $k=-\frac{p}{2}$, on retrouverait bien la directrice de la parabole P et la courbe Σ.

Pendant que M décrit la parabole (Γ), le point $N(\alpha, \beta)$ décrira le lieu :

$$(\alpha+2k)[(\alpha-2k)\beta^2+2pk^2]=0$$

qui, dans le cas où on a $k=-\frac{p}{2}$ représentera la droite $\alpha-p=0$ et la courbe μ : $2(\alpha+p)\beta^2+p^3=0$ hyperbole équilatère du troisième ordre, qu'on rencontrera dans la suite de cette étude. On voit également que le point $N(\alpha, \beta)$ décrivant la droite $\alpha+2k=0$, la droite $x-k=0$ est décrite par le pôle double qui se trouve à l'intersection des deux sécantes AB : $\beta y-p(x+\alpha)=0$, et OG : $\beta y+px=0$.

3me Exemple. — Supposons que le pôle double (x, y) décrive la droite $y-\delta x=0$. Le point $M(x_1, y_1)$ décrira en ce cas la droite :

$$\delta^3 y_1 - 4p + 2\delta^2(x_1-p) = 0.$$

Cette équation est celle d'une normale à la parabole P, ayant son pied au point G qui a pour coordonnées $\frac{2p}{\delta^2}$, $\frac{2p}{\delta}$. On vérifie que dans ce cas le point $N(\alpha, \beta)$ décrit le lieu représenté par l'équation :

$$\left(\beta+\frac{p}{\delta}\right)(2\delta\beta-\delta^2\alpha-2p)=0.$$

Digitized by Google

Ce lieu se compose du diamètre $\beta + \frac{p}{\delta} = 0$ de la parabole P et de la tangente au point $G\left(\frac{2p}{\delta^2}, \frac{2p}{\delta}\right)$.

Quand le point M décrit la normale :

$$\delta^3 y_1 - 4p + 2\delta^2 (x_1 - p) = 0$$

il suffit de remplacer dans l'équation de cette normale x_1 et y_1 par leur valeur exprimée en fonction de x et de y pour obtenir l'équation du lieu décrit par les trois pôles doubles, on trouve ainsi :

$$(p - \delta^2 x)\, y^2 + \delta^3 x^2 y - p\delta^2 x^2 = 0.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$(y - \delta x)\, [(p - \delta^2 x)\, y + p\delta x] = 0.$$

On retrouve ainsi l'équation de la droite $y - \delta x = 0$ décrite par le premier pôle double, et on voit que les deux autres pôles doubles se meuvent sur une hyperbole équilatère qui passe par le sommet de la parabole P, et dont les asymptotes sont parallèles aux axes de coordonnées. Ce résultat offre donc une vérification de la solution du problème 2.

4me Exemple. — On suppose qu'un des trois pôles doubles (x, y) décrive une parabole $y^2 - 2kx = 0$, et on cherche le lieu décrit par les deux autres pôles doubles.

En ce cas, le point $M\ (x_1, y_1)$ décrira la parabole cubique :

$$(2k + p)^3\, y_1^2 - 8k^2 (x_1 - p)^3 = 0.$$

En remplaçant x_1 et y_1 par leur valeur tirée des formules du problème 1, on verra que le lieu décrit

Digitized by Google

par les trois pôles doubles sera représenté par l'équation :

$$(y^2 - 2kx)(4k^2y^4 - p^2(6k + p)xy^2 - 2kp^3x^2) = 0.$$

On obtient ainsi trois paraboles. La première est la parabole $y^2 - 2kx = 0$. En remarquant qu'on a identiquement :

$$p^3 + 12kp^2 + 36pk^2 + 32k^3 = (p + 2k)^2(p + 8k)$$

on verra que l'équation du lieu décrit par les deux autres pôles doubles se décompose en deux autres équations qui représentent chacune une parabole :

$$8k^2y^2 - px\left[6kp + p^2 + (2k + p)\sqrt{p(p + 8k)}\right] = 0$$

et $$8k^2y^2 - px\left[6kp + p^2 - (2k + p)\sqrt{p(p + 8k)}\right] = 0.$$

En introduisant dans ces équations l'hypothèse $k = p$, la parabole décrite par le premier pôle double deviendra la parabole P : $y^2 - 2px = 0$; les paraboles décrites par les deux autres pôles doubles seront représentées par les équations :

$$y^2 - 2px = 0 \quad \text{et} \quad 4y^2 + px = 0.$$

On retombe donc ainsi sur la solution du problème 6, qui donne pour l'équation du lieu décrit par les trois pôles doubles :

$$(y^2 - 2px)^2(4y^2 + px) = 0.$$

De même, en ce cas, la parabole cubique décrite par le point $M(x_1, y_1)$ deviendra la développée de la parabole P et sera représentée par l'équation :

$$27py_1^2 - 8(x_1 - p)^3 = 0.$$

Digitized by Google

PROBLÈME 9. — Par les points d'intersection du cercle C et de la parabole P, on peut faire passer une parabole P''. On demande l'équation de cette parabole P'', les coordonnées de son sommet et l'équation du lieu décrit par ce sommet et par le foyer, quand le point M décrit un lieu $\rho(x_1, y_1) = 0$.

L'équation générale des coniques qui passent par les points d'intersection du cercle C et de la parabole P est :

$$(S)\ x^2 + (1+\lambda)\, y^2 - (p + x_1 + 2p\lambda)\, x - \frac{y_1}{2}\, y = 0.$$

Pour avoir l'équation d'une parabole passant par les points d'intersection des deux courbes C et P, il faut et il suffit que l'on prenne dans cette dernière équation : $\lambda = -1$. L'équation de cette parabole sera alors :

$$(P'')\ x^2 - (x_1 - p)\, x - \frac{y_1}{2}\, y = 0.$$

L'équation de l'axe de P'' est : $2x - (x_1 - p) = 0$. Les coordonnées du sommet de cette parabole s'obtiendront en cherchant l'intersection de l'axe et de la courbe P'', et seront :

$$x_a = \frac{x_1 - p}{2} \qquad y_a = -\frac{(x_1 - p)^2}{2y_1}.$$

De ces valeurs on tire :

$$x_1 = 2x_a + p \qquad y_1 = -\frac{2x_a^2}{y_a}.$$

Si donc le point $M\ (x_1, y_1)$ décrit un lieu dont l'équation est $\rho(x_1, y_1) = 0$, le sommet de cette parabole P'' : (x_a, y_a) décrira un lieu dont l'équation sera :

$$\rho\left(2x_a + p\ ,\ -\frac{2x_a^2}{y_a}\right) = 0.$$

Digitized by Google

Il suffira, pour obtenir cette équation, de remplacer dans l'équation $p(x_1, y_1)=0$ x_1 par $2x_a+p$, et y_1 par $-\frac{2x_a^2}{y_a}$.

Ainsi, dans le cas où M décrirait la développée de la parabole P, on aurait : $16y_a^2-27px_a=0$.

Et si M décrivait la parabole cubique dont l'équation est $4py_1^2-(x_1-p)^3=0$, le lieu du sommet (x_a, y_a) serait la parabole P elle-même.

Désignons par x_f, y_f les coordonnées du foyer de la parabole P''. Ce foyer se trouve sur l'axe de cette parabole, représenté par l'équation $2x-(x_1-p)=0$ à une distance du sommet de cette même parabole égale à $\frac{y_1}{8}$, car le paramètre de la parabole P'' est égal à $\frac{y_1}{4}$.

Écrivons que la distance du foyer de la parabole P'' à son sommet est égale à $\frac{y_1}{8}$, nous aurons (en remarquant que $x_f=x_a$) :

$$y_f-y_a=\pm\frac{y_1}{8}.$$

Des relations précédentes nous tirons :

$$x_f=\frac{x_1-P}{2} \qquad y_f=y_a\pm\frac{y_1}{8}=-\frac{(x_1=p)^2}{2y_1}\pm\frac{y_1}{8}$$

et $$x_1=2x_f+p \qquad y_1=4\left(y_f\pm\sqrt{x_f^2+y_f^2}\right)$$

avec $$y_1=4\left(\pm\sqrt{y_f^2-x_f^2}-y_f\right).$$

Si donc le point $M(x_1, y_1)$ décrit un lieu $f(x_1, y_1)=0$, le foyer (x_f, y_f) de la parabole P'' décrira les deux courbes représentées par les équations :

$$f\left[(2x_f+p \quad , \quad 4\left(y_f\pm\sqrt{x_f^2+y_f^2}\right)\right]=0$$

et $$f\left[2x_f+p \quad , \quad 4\left[\pm\sqrt{y_f^2-x_f^2}-y_f\right)\right]=0.$$

Digitized by Google

Ainsi le point $M\ (x_1,\ y_1)$ décrivant la droite $Ax_1 + By_1 + C = 0$, le lieu du foyer de la parabole P'' se composera des deux hyperboles suivantes :

$$(2Ax + 4By + Ap + C)^2 = 16B^2\,(x^2 + y^2)$$

et $$(2Ax - 4By + Ap + C)^2 = 16B^2\,(y^2 - x^2).$$

On voit que le sommet de la parabole P est un des foyers de la première de ces deux hyperboles.

Des relations précédentes on tire :

$$x_a = x_1 - x_c = x_e - p = x_f.$$

PROBLÈME 10. — Supposons que le point $M\ (x_1,\ y_1)$ ait une position déterminée, et formons un quadrilatère : Q', dont les quatre sommets seront : le point M, deux des points d'incidence A et B des normales menées de ce point M à la parabole P, et le point de concours N (dont les coordonnées sont α et β) des tangentes menées à cette même parabole P en A et en B.

On demande :

1° L'équation de la circonférence de cercle C' circonscrite au quadrilatère *NAMB*, équation dans laquelle ne devront figurer, en dehors des coordonnées courantes, que les coordonnées α et β du point N et le paramètre de la parabole P ; 2° les coordonnées $x_{c'}$ et $y_{c'}$ du centre de cette circonférence C', exprimées également en fonction de α, de β et de p ; et 3° la relation qui devra exister entre α et p, pour que le cercle C' coïncide avec le cercle C.

Cette relation est l'équation d'un lieu décrit par le point $N\ (\alpha,\ \beta)$. Quel lieu décrira simultanément le point $M\ (x_1,\ y_1)$?

Digitized by Google

Pour obtenir l'équation de la circonférence C', je remarque que les coordonnées de son centre $x_{c'}$, $y_{c'}$ sont égales respectivement à la demi-somme des coordonnées des points $N(\alpha, \beta)$ et $M(x_1, y_1)$ qui sont situés à l'extrémité d'un même diamètre de cette circonférence C'.

Les formules de Desboves donnent les coordonnées x_1, y_1 du point M en fonction de celles α et β du point N. On aura donc :

$$x_1 = \frac{2\beta^2 - \alpha p + p^2}{p} \qquad x_{c'} = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2\beta^2 - \alpha p + p^2}{p}\right) = \frac{2\beta^2 + p^2}{2p}$$

$$y_1 = -\frac{2\alpha\beta}{p} \qquad y_{c'} = \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{-2\alpha\beta}{p}\right) = \frac{\beta(p - 2\alpha)}{2p}.$$

L'équation de la circonférence de cercle C' est :

$$x^2 + y^2 - 2x_{c'}x - 2y_{c'}y + F = 0.$$

Pour exprimer également F en fonction de α et de β, il suffit de remarquer que le cercle C' passe par le point N, dont les coordonnées sont α et β. On aura donc : $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha x_{c'} - 2\beta y_{c'} + F = 0$. Portant les valeurs de $x_{c'}$, $y_{c'}$ et F dans l'équation du cercle C', il viendra :

$$(C')\ x^2 + y^2 - \frac{1}{p}(2\beta^2 + p^2)x - \frac{\beta}{p}(p - 2\alpha)y + \alpha(p - \alpha) = 0.$$

Des relations qui donnent $x_{c'}$, $y_{c'}$ en fonction de α et de β, nous tirons :

$$\alpha = \frac{p}{2} \pm y_{c'}\sqrt{\frac{2p}{2x_{c'} - p}} \qquad \beta = \pm\sqrt{p\left(x_{c'} - \frac{p}{2}\right)}.$$

Si donc le point $N(\alpha, \beta)$ décrit un lieu dont l'équation est $\psi(\alpha, \beta) = 0$, le centre $x_{c'}$, $y_{c'}$ de la circon-

Digitized by Google

férence C' décrira simultanément un lieu dont l'équation sera :

$$\psi\left[\left(\frac{p}{2} \pm y_{c'}\sqrt{\frac{2p}{2x_{c'}-p}}\ ,\ \pm\sqrt{p\left(x_{c'}-\frac{p}{2}\right)}\right]=0.$$

Pour avoir cette équation, il suffira dans l'équation $\psi(\alpha, \beta)=0$ de remplacer α et β par leur valeur exprimée en fonction de $x_{c'}$ et de $y_{c'}$.

L'équation du cercle C' peut s'écrire, en fonction des coordonnées (α, β) du point N et des coordonnées (x_1, y_1) du point M qui sont situés aux extrémités d'un même diamètre, comme il suit :

$$x^2+y^2-(\alpha+x_1)x-(\beta+y_1)y+\alpha x_1+\beta y_1=0.$$

Les formules déjà citées nous montrent que si on suppose $\alpha=p$, il viendra :

$$x_1=\frac{2\beta^2}{p} \qquad y_1=-2\beta.$$

L'équation prendra la forme :

$$x^2+y^2-(p+x_1)x-\frac{y_1}{2}y=0.$$

C'est-à-dire que l'équation du cercle C' deviendra en ce cas identique à celle du cercle C. Le point M se confondra avec le point G. On sait que si $\alpha=p$, on aura : $y_1^2-2px_1=0$, c'est-à-dire que si le point N décrit une perpendiculaire à l'axe située à droite du sommet de la parabole P et à une distance de ce sommet égale à p, le point M décrira la parabole P elle-même. (Si $\alpha=p$, les deux cercles C et C' coïncident ; car ils ont alors trois points A, B, M communs.) Les cercles C' et C coïncidant, leurs deux centres coïncident et décriront le même lieu qui a pour équation : $8y^2=p(2x-p)$.

Digitized by Google

On remarque également que le centre $(x_{c'}, y_{c'})$ du cercle C' décrit la parabole $8y_{c'}^2 = p(2x_{c'} - p)$, non seulement pour $\alpha = p$, mais aussi pour $\alpha = 0$. En désignant par k une constante, supposons que le point $N(\alpha, \beta)$ décrive la droite $\alpha = k$; le centre $(x_{c'}, y_{c'})$ du cercle C' décrira la parabole :

$$8py_{c'}^2 = (p - 2k)^2 (2x_{c'} - p).$$

Or le rapport $\frac{(p-2k)^2}{p}$ sera égal à p pour les deux valeurs $k = 0$ et $k = p$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Mais si nous considérons les positions $[\alpha = 0, \beta = \beta_1]$ et $[\alpha = p, \beta = \beta_1]$ du point $N(\alpha, \beta)$ sur les deux droites $\alpha = 0$ et $\alpha = p$, nous verrons que les deux positions correspondantes du centre $(x_{c'}, y_{c'})$ sur la parabole $8y_{c'}^2 = p(2x_{c'} - p)$ sont symétriques l'une de l'autre relativement à l'axe de la parabole. En effet, pour $\alpha = 0$ et $\beta = \beta_1$ on a $y_{c'} = \frac{\beta_1}{2}$; et pour $\alpha = p$, $\beta = \beta_1$ on a $y_{c'} = \frac{-\beta_1}{2}$. Cela résulte de ce qu'on a $y_{c'} = \frac{\beta(p-2\alpha)}{2p}$.

PROBLÈME 11. — Lorsque le point $M(x_1, y_1)$ décrit la directrice de la parabole P, démontrer que le centre $x_{c'}$, $y_{c'}$ de la circonférence de cercle C' décrira le lieu Σ du 3e degré déjà obtenu précédemment.

Si on veut se rendre compte de la position du centre de la circonférence C relativement à la position correspondante du centre de la circonférence C', on peut prendre les expressions suivantes, qui donnent les coordonnées x_c et y_c soit en fonction de

Digitized by Google

$x_{c'}$, $y_{c'}$ et α, soit en fonction de $x_{c'}$ et de $y_{c'}$ seulement :

$$\begin{cases} x_c = x_{c'} + \dfrac{p-\alpha}{2} \\ y_c = y_{c'} \dfrac{2\alpha - p}{\alpha} \end{cases} \qquad x_c = \frac{1}{2}\left[\frac{4x_{c'}+p}{2} \pm y_{c'}\sqrt{\frac{p}{x_{c'}-\frac{p}{2}}}\right]$$

$$y_c = \frac{1}{2}\left[y_{c'} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p\left(x_{c'}-\frac{p}{2}\right)}\right].$$

Si le point $M(x_1, y_1)$ décrit la directrice de la parabole P, le point $N(\alpha, \beta)$ décrira la parabole

$$2\beta^2 - \alpha p + \frac{3p^2}{2} = 0$$

le centre (x_c, y_c) de la circonférence C décrira la perpendiculaire $x_c = \frac{p}{4}$ à l'axe de la parabole P, élevée à égale distance du foyer et du sommet de cette parabole. (La polaire du point N ne rencontrera pas la parabole, et on aura deux normales imaginaires.) Néanmoins le centre $(x_{c'}, y_{c'})$ de la circonférence C' décrira le lieu Σ, ainsi qu'on le verra en se servant des expressions précédentes de x_c et y_c, et en remarquant qu'on a $x_c = \frac{x_1 + p}{2} = \frac{p}{4}$ (puisqu'on a :

$$x_1 = \frac{-p}{2}\Big).$$

En faisant le calcul indiqué, on trouvera :

$$(\Sigma)\quad p y_{c'}^2 = 2x_{c'}^2(2x_{c'} - p).$$

On a donc ainsi une nouvelle définition du lieu Σ.

Digitized by Google

PROBLÈME 12. — La corde AB, qui joint les points d'incidence A et B de deux des normales issues du point M, est une sécante commune au cercle C' et à la parabole P. Il existe une seconde sécante qui forme avec AB un couple de sécantes communes aux deux courbes C' et P. On demande l'équation de cette seconde sécante. Démontrer qu'elle est parallèle à la sécante OG qui passe par les points d'intersection du cercle C et de la parabole P, et qui forme avec AB un couple de sécantes communes aux deux courbes C et P.

Pour trouver l'équation de la droite EF, qui forme avec AB un couple de sécantes communes aux deux courbes C' et P, il suffit d'identifier l'équation de la conique formée par ce couple avec l'équation générale des coniques qui passent par les points d'intersection de la circonférence de cercle C' et de la parabole P :

$$(S')\quad x^2+(1+\lambda)y^2-\left(\frac{2\beta^2+p^2}{p}+2p\lambda\right)x-\beta\left(\frac{p-2\alpha}{p}\right)y+\alpha(p-\alpha)=0.$$

L'équation de AB étant :

$$\beta y-p(x+\alpha)=0 \quad \text{ou} \quad x-\frac{\beta}{p}y+\alpha=0$$

l'équation de EF, en désignant par k un coefficient à déterminer et en remarquant que le coefficient angulaire de cette droite doit être égal à celui de la droite AB, mais de signe contraire, sera :

$$x+\frac{\beta}{p}y+k=0.$$

Digitized by Google

La conique formée par ces deux droites AB, EF sera représentée par l'équation :

$$\left(x - \frac{\zeta}{p} y + \alpha\right)\left(x + \frac{\zeta}{p} y + k\right) = 0.$$

En identifiant cette équation avec l'équation générale (S'), on trouvera :

$$\alpha k = \alpha(p - \alpha) \quad \text{d'où} \quad k = p - \alpha.$$

Donc l'équation EF sera :

$$\zeta y + p(x + p - \alpha) = 0.$$

Les sécantes AB et EF se coupent sur la directrice.

(Pour former l'équation de EF, nous nous sommes basés sur la propriété : que l'axe de la parabole P est la bissectrice de l'angle formé par les droites AB et EF. Il en résulte que EF est parallèle à OG.)

Les trois courbes C, C' et P ayant une même sécante commune AB, leurs autres sécantes communes devront concourir en un même point. La droite AB étant l'axe radical des circonférence C et C', leur deuxième sécante commune sera la droite de l'infini. La sécante OG commune à la circonférence C et à la parabole P, ainsi que la sécante EF commune à la circonférence C' et à cette même parabole, devront passer toutes deux par le point d'intersection de AB et de la droite de l'infini. Donc ces droites EF et OG seront parallèles.

Dans le problème 3, on a examiné le cas particulier où le point $M(x_1, y_1)$ décrit la parabole P : $y_1^2 - 2px_1 = 0$. Nous avons vu que dans ce cas un pôle double commun au cercle C et à la parabole P se trouve sur la directrice de la parabole P, et les

Digitized by Google

deux autres sur le lieu Σ. Un pôle double se trouve sur la directrice, parce que, dans le cas particulier considéré, le cercle C se confond avec le cercle C'. On sait que parmi les trois pôles doubles communs au cercle C' et à la parabole P, il y a toujours un pôle double sur la directrice de cette parabole, quel que soit le cercle C' (décrit sur NM comme diamètre). Cela a donc encore lieu quand on considère le cercle C' dans l'hypothèse particulière où il se confond avec le cercle C, c'est-à-dire quand on a $y_1^2 - 2px_1 = 0$ (condition qui entraine : $\alpha - p = 0$).

PROBLÈME 13. — On demande : 1° L'équation de la parabole P''' qui passe par les points d'intersection du cercle C' et de la parabole P, ainsi que les coordonnées de son sommet ; 2° l'équation de la droite qui joint les centres des deux cercles C et C'.

1° L'équation générale des coniques qui passent par les points d'intersection du cercle C' et de la parabole P est :

$$(S') \quad x^2 + (1+\lambda)y^2 - \left(\frac{2\beta^2 + p^2}{p} + 2p\lambda\right)x - \beta\left(\frac{p-2\alpha}{p}\right)y + \alpha(p-\alpha) = 0.$$

Si on prend $\lambda = -1$ dans cette équation, on obtient l'équation de la parabole P''' qui passe par les points d'intersection du cercle C' et de la parabole P.

Cette équation est :

$$(P''') \quad x^2 - \left(\frac{2\beta^2 - p^2}{p}\right)x - \beta\left(\frac{p-2\alpha}{p}\right)y + \alpha(p-\alpha) = 0.$$

Digitized by Google

L'équation de l'axe de cette parabole P''' est :

$$2px - 2\beta^2 + p^2 = 0$$

et les coordonnées du sommet sont :

$$x = \frac{2\beta^2 - p^2}{2p} \qquad y = \frac{4p^2\alpha(p-\alpha) - (2\beta^2 - p^2)^2}{4p\beta(p-2\alpha)}.$$

On a désigné par $x_{c'}$ et $y_{c'}$ les coordonnées du centre de la circonférence C'. Si $x_{a'}$ est l'abcisse du sommet de la parabole P''', on voit qu'entre $x_{a'}$, $x_{c'}$ et p on a la relation $x_{a'} = x_{c'} - p$.

Cette relation apparaît immédiatement si on prend l'équation du cercle C' sous la forme :

$$x^2 + y^2 - (\alpha + x_1)x - (\beta + y_1)y + \alpha x_1 + \beta y_1 = 0.$$

L'équation de la parabole P''' se présentera alors sous la forme :

$$x^2 - (\alpha + x_1 - 2p)x - (\beta + y_1)y + \alpha x_1 + \beta y_1 = 0.$$

Les coordonnées du sommet de cette parabole étant :

$$x_{a'} = \frac{\alpha + x_1}{2} - p \qquad y_{a'} = \frac{4(\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha + x_1 - 2p)^2}{4(\beta + y_1)}.$$

On reconnaît immédiatement, sous cette forme, qu'entre $x_{a'}$, $x_{c'}$ et p, on a la relation $x_{a'} = x_{c'} - p$.

2° La droite, qui joint le centre du cercle C au centre de C', sera la perpendiculaire élevée au milieu de la corde AB. Elle est représentée par l'équation :

$$y - \beta = -\frac{\beta}{p}\left(x - \frac{\beta^2 - p\alpha}{p}\right) \text{ ou } py + \beta\left[x + \alpha - p - \frac{\beta^2}{p}\right] = 0.$$

Si le point N (α, β) se trouve sur la parabole P, cette droite est normale à cette courbe en ce point.

Digitized by Google

Remarque. — En rappelant les relations précédentes (voir la remarque qui se trouve à la fin de la solution du problème 9), on a finalement les relations suivantes :

$$x_a = x_f = x_1 - x_c = x_c - p = x_{c'} - \frac{p+\alpha}{2} = x_{a'} + \frac{p-\alpha}{2}.$$

PROBLÈME 14. — Le lieu décrit par le sommet d'un angle droit dont les côtés sont tangents à la parabole P, tandis que la polaire de ce sommet relativement à la parabole reste perpendiculaire à un des côtés de cet angle en un des points de tangence M, est représenté par l'équation :

$$(\mu)\quad 2(x+p)y^2 + p^3 = 0.$$

D'un autre côté, on considère les pieds A, B de deux normales menées à la parabole de ce point M. Dans le triangle ABM, le côté AB passera par un point fixe situé sur l'axe de la parabole P à gauche du sommet et à une distance de ce sommet égale à p. Les côtés MA et MB seront normaux à la parabole en A et en B. Le lieu du point d'intersection du côté AB et de la tangente à la parabole P au point M (c'est-à-dire au sommet du triangle opposé au côté AB) sera représenté par l'équation du 3e degré :

$$(\mu')\quad (3x+2p)y^2 + 2p(x+p)^2 = 0$$

(problème du concours d'admission à l'École Polytechnique en 1860).

Ces deux lieux du 3e degré (μ) et (μ') dont on vient de donner les équations, se coupent sur une per-

Digitized by Google

pendiculaire à l'axe de la parabole P en deux points D et D' qui ont pour coordonnées :

$$x_1 = -2p \quad ; \quad y = \pm \frac{p}{\sqrt{2}} \quad \text{(voir fig. 5).}$$

Ces deux points correspondent à deux positions particulières du point M sur la parabole P. Quelles seront les coordonnées du point M quand il occupera ces deux positions (c'est-à-dire quand la tangente en M à la parabole P sera coupée en un même point par la corde AB et par les tangentes en A et en B à la parabole P)?

Les expressions de x_1 et de y_1 :

$$x_1 = \frac{2\beta^2 - \alpha p + p^2}{p} \qquad y_1 = -\frac{2\alpha\beta}{p}$$

montrent que si le point M décrit la parabole P (c'est-à-dire si on a $y_1^2 - 2px_1 = 0$), on aura, en portant les valeurs de x_1 et y_1 dans cette équation :

$$\frac{4\alpha^2\beta^2}{p^2} - 4\beta^2 + 2\alpha p - 2p^2 = 0 \quad \text{ou} \quad (p-\alpha)[2(\alpha+p)\beta^2 + p^3] = 0.$$

Donc, lorsque le point M décrira la parabole P, le point N décrira la perpendiculaire à l'axe qui a pour équation $\alpha - p = 0$. NA et NB sont les deux tangentes à la parabole P menées du point N. Elles coupent aux points T et T' la tangente menée à la même parabole au point M (voir fig. 2). Dans le triangle TNT' circonscrit à la parabole P, chacun des trois sommets T, N, T peut être considéré comme jouissant des mêmes propriétés relativement au point M, c'est-à-dire que le point M est le point de rencontre

Digitized by Google

des normales élevées aux points où les polaires de T, N, T' coupent la parabole. Pour chaque valeur donnée à x_1 et y_1, on peut tirer des équations données plus haut trois valeurs correspondantes pour α et pour β. Ces trois valeurs seront les coordonnées (correspondantes à la valeur x_1, y_1) des sommets du triangle TNT' circonscrit à la parabole P, les pieds des trois normales menées du point M (x_1, y_1) à cette parabole étant les points de tangence des côtés de ce triangle circonscrit. Donc, en vertu de l'équation :

$$(\alpha - p)[2(\alpha + p)\beta^2 + p^3] = 0$$

pendant que le point M décrit la parabole P ($y_1^2 - 2px_1 = 0$), le sommet N décrit la droite $\alpha - p = 0$, et les deux autres sommets T et T' décriront le lieu du 3e degré qui a pour équation :

$$(\mu)\quad 2(x + p)y^2 + p^3 = 0.$$

Le lieu (μ) des points T et T' n'est autre que le lieu du sommet d'un angle circonscrit à la parabole P, tel que la polaire de ce sommet de l'angle, relativement à la parabole, soit perpendiculaire à un des côtés de l'angle.

Dans le problème du concours de l'École Polytechnique de 1860, le point N décrivait la perpendiculaire $\alpha - p = 0$ à l'axe. La droite AB, polaire du point N, était donc représentée par l'équation $\beta y = p(x + p)$ qui montre que cette droite tourne autour du point $(-p, 0)$. Comme, en vertu des formules citées, on a $y_1 = -\frac{2\alpha\beta}{p} = -2\beta$, l'équation de AB deviendra $-y_1 y = 2p(x + p)$. La tangente en M (x_1, y_1) étant représentée par l'équation :

$$y_1 y = p(x + x_1)$$

Digitized by Google

en ajoutant membre à membre ces deux dernières équations on aura $x_1 = -(3x + 2p)$, relation entre les abcisses d'un point de la parabole et d'un point du lieu cherché. En portant la valeur de y_1 et celle de x_1 dans l'équation $y_1^2 - 2px_1 = 0$, on aura l'équation du lieu demandé :

$$(\mu') \quad (3x + 2p)\, y^2 + 2p\,(x + p)^2 = 0.$$

Pour trouver les abcisses des points d'intersection des deux lieux (μ) et (μ'), il suffira d'égaler les valeurs de y^2 tirées de chacune de ces deux équations et on aura :

$$4x^3 + 12px^2 + 9p^2x + 2p^3 = (x + 2p)(2x + p)^2.$$

La racine double $x = -\frac{p}{2}$ donne dans les deux courbes des points imaginaires. La racine $x = -2p$ donne l'abcisse des deux seuls points d'intersection réels D et D', situés sur une même perpendiculaire à l'axe, symétriques par rapport à cet axe, qui ont pour coordonnées :

$$x = -2p \quad y = +\frac{p}{\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad x = -2p \quad y = \frac{-p}{\sqrt{2}}.$$

Quand le point M occupera sur la parabole P les deux positions qui ont pour coordonnées :

$$\begin{cases} x_1 = 4p \\ y_1 = +2p\sqrt{2} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x_1 = 4p \\ y_1 = -2p\sqrt{2} \end{cases}$$

les coordonnées des points correspondants à ces valeurs de M seront les mêmes dans les équations des deux courbes (μ) et (μ') et seront par conséquent les coordonnées des points d'intersection de ces deux cour-

Digitized by Google

bes. En d'autres termes, pour $x_1 = 4p$, $y_1 = 2p\sqrt{2}$ les deux équations (μ), (μ') donneront la même valeur de x et de y, soit $x = -2p$; $y = +\frac{p}{\sqrt{2}}$; de même pour $x_1 = 4p$, $y_1 = -2p\sqrt{2}$; (μ) et (μ') donneront : $x = -2p$, $y = -\frac{p}{\sqrt{2}}$. Ces coordonnées x et y sont celles des deux points d'intersection D et D'. Les points T et T' du lieu (μ) se seront confondus avec le point D du lieu (μ').

En effet, pour $x_1 = 4p$ et $y_1 = \pm 2p\sqrt{2}$, la sécante AB deviendra tangente à la parabole P, le point N se confondra avec les points A et B confondus en un seul point, et ce point N deviendra un point de la parabole. Les trois points D, T, T', confondus en un point unique, seront donnés par l'intersection de la tangente en N et de la tangente en M. De même les trois points D', T, T'.

(Pour $x_1 = 4p$, $y_1 = -2p\sqrt{2}$, les trois points N, A, B auront les mêmes coordonnées : $\alpha = p$ et $\beta = +p\sqrt{2}$; pour $x_1 = 4p$ et $y_1 = +2p\sqrt{2}$, les trois points N, A, B auront pour coordonnées communes : $\alpha = +p$ et $\beta = -p\sqrt{2}$.)

Les deux points D et D' sont situés sur une même perpendiculaire à l'axe de la parabole élevée au point $x = -2p$, $y = 0$.

Les pieds A et B des normales menées à la parabole P du point M (x_1, y_1) pris sur cette parabole ne sont réels que si l'équation $y^2 + y_1 y + 2p^2 = 0$ qui donne leurs ordonnées a ses racines réelles, c'est-à-dire si $y_1^2 \geqq 8p^2$ et par conséquent $x_1 \geqq 4p$. On vérifie ainsi que le point M doit être placé à droite de la parabole cubique, développée de la parabole P, qui coupe cette parabole aux points $(4p\,;\ \pm 2p\sqrt{2})$.

Digitized by Google

La condition $x_1 \geqq 4p$, en remarquant qu'on a $\{x_1 = -(3x + 2p)\}$, donne $-3x - 2p \geqq 4p$, d'où $x \leqq -2p$.

On trouve ainsi que les points de la courbe (μ') situés à gauche de la droite DD' correspondent à des normales réelles. Ainsi la droite AB joindra deux pieds réels de normales, si $x_1 > 4p$ ou $x < -2p$. La droite $x = -2p$ divise donc la courbe (μ') en deux parties. Les points à gauche correspondent aux points (x_1, y_1) situés à droite de la parabole cubique ; et les points de la courbe (μ') situés à droite de $x = -2p$ correspondront aux positions du point M sur la parabole P, situées à gauche de la parabole cubique. Il en résulte que les dernières droites AB qui coupent la parabole, sont les tangentes aux points d'intersection de la parabole P et de sa développée. Donc les points où la droite $x = -2p$ coupe la courbe (μ'), correspondent aux deux points de la parabole P : $x_1 = 4p$, $y_1 = \pm 2p\sqrt{2}$, pieds d'une normale double. On arrive *aux mêmes conclusions*, en faisant tourner de droite à gauche la sécante AB autour du point fixe $(-p, 0)$, en lui donnant d'abord la position horizontale, en notant les deux positions où elle devient tangente à la parabole P, et en remarquant qu'entre ces deux positions elle ne rencontre pas la parabole.

PROBLÈME 15. — La parabole P', obtenue précédemment $(4y^2 + px = 0)$, passe par les deux points d'intersection D et D' des deux lieux (μ) et (μ'). Déterminer 1° les coordonnées x_1 et y_1 du point M lorsque ce point occupera sur la développée de la parabole P les deux positions qui donneront les deux

Digitized by Google

points D et D' du lieu P' : 2° les coordonnées (sur la parabole P) du pied de la normale simple et du pied de la normale double issues du point M, lorsque ce point occupera ces deux positions sur la développée.

Résoudre ce problème, en considérant successivement les deux modes de génération de la parabole P' indiqués précédemment.

Les deux lieux (φ) et (φ') se coupent en deux points D et D', symétriques par rapport à l'axe de la parabole P, qui ont pour coordonnées :

$$(D)\ x = -2p\ ;\quad y = \frac{+p}{\sqrt{2}} \qquad (D')\ x = -2p\ ;\quad y = \frac{-p}{\sqrt{2}}.$$

La parabole P' passe également par ces deux points, car elle coupe le lieu (μ) en deux points réels qui ont pour coordonnées $x = -2p$, $y = \pm\frac{p}{\sqrt{2}}$ et en deux points imaginaires $x = p$, $y = \pm\frac{p\sqrt{-1}}{2}$. Elle coupe le lieu (μ') aux points qui ont pour coordonnées :

$$\left(x = -2p,\ y = \pm\frac{p}{\sqrt{2}}\right) \text{ et } \left(x = -\frac{4p}{5},\ y = \pm\frac{p}{\sqrt{5}}\right).$$

Quelle position le point M occupera-t-il sur la développée de la parabole P, quand la droite qui joint le sommet O de cette parabole au pied de la normale simple, viendra couper la tangente au pied de la normale double en D pour une de ces positions du point M, en D' pour l'autre position de ce point?

Digitized by Google

On considère ainsi le premier mode de génération de la parabole P'. Pour trouver la position du point M, correspondante au point d'intersection D', on s'appuie sur ce que dans l'équation qui donne les ordonnées des pieds des trois normales issues du point $M(x_1, y_1)$:

$$y^3 + 2p(p - x_1)y - 2p^2 y_1 = 0$$

le produit des trois ordonnées est égal à $2p^2 y_1$. Comme il y a une normale double, deux des trois racines sont égales entre elles. Pour trouver la troisième racine, on remarque que la droite qui joint le point d'intersection D' au sommet O de la parabole P, coupera cette parabole au pied G de la normale simple. La droite OD' a pour équation :

$$y = \frac{-p}{-p\sqrt{2}}x \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{x}{2\sqrt{2}};$$

elle coupera la parabole P en un point qui a pour coordonnées $(x = 16p,\ y = 4p\sqrt{2})$. Le produit des deux ordonnées égales entre elles est donc égal à $\frac{2p^2 y_1}{4p\sqrt{2}} = \frac{py_1}{2\sqrt{2}}$. La dérivée du premier membre de l'équation aux ordonnées des pieds des normales est $3y^2 + 2p(p - x_1)$. Les deux ordonnées égales annulent cette dérivée. Or, on a pour le produit de ces deux ordonnées égales : $y^2 = \frac{py_1}{2\sqrt{2}}$. La substitution de cette valeur de y^2 dans la dérivée donnera donc

$\frac{3py_1}{2\sqrt{2}} + 2p(p - x_1) = 0$, d'où on tire $y_1 = \frac{4\sqrt{2}}{3}(x_1 - p)$.

Le point x_1, y_1 se trouvant sur la développée de la

Digitized by Google

parabole P, si on introduit cette valeur de y_1 dans l'équation :

$$27py_1^2 - 8(x_1 - p)^3 = 0$$

de cette développée, il restera, après avoir divisé par $x_1 - p$: $x_1 = 13p$, et par suite : $y_1 = 16p\sqrt{2}$. Remplaçant y_1 par cette valeur, le carré de l'ordonnée, racine double de l'équation du 3e degré en y, deviendra :

$$\frac{p \times 16p\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 8p^2, \qquad \text{donc} \qquad y^2 = 8p^2 = 2px,$$

d'où $x = 4p$. Le pied de la normale double a donc pour coordonnées $x = 4p$, $y = -2p\sqrt{2}$, pour une des positions cherchées du point M. La tangente à la parabole P en ce point a pour équation :

$$-2p\sqrt{2}\,y = p(x + 4p) \quad \text{ou} \quad 2\sqrt{2}\,y + x + 4p = 0.$$

La droite OG est représentée par l'équation :

$$y = \frac{4p\sqrt{2}}{16p}x \quad \text{ou} \quad y = \frac{\sqrt{2}}{4}x.$$

Ces deux droites se coupent au point :

$$D'\left(x = -2p \quad , \quad y = \frac{-p}{\sqrt{2}}\right).$$

En résumé, quand le point M occupera sur la développée de la parabole P une position qui a pour cordonnées $x_1 = 13p$, $y_1 = 16p\sqrt{2}$, le centre d'un couple de sécantes communes à la circonférence C et à la parabole P viendra sur la parabole P' (qui est le lieu de ces centres) au point D' [point de

Digitized by Google

rencontre des deux lieux (μ) et (μ')]. Le pied G de la normale simple aura pour coordonnées : $x = 16p$, $y = 4p\sqrt{2}$, et le pied A de la normale double : $x = 4p$, $y = -2p\sqrt{2}$. Pour le point d'intersection D, il suffira de changer le signe de $\sqrt{2}$.

Recherche des positions du point M *dans le second mode de génération.* — Les tangentes à la parabole P aux deux points M_3 et M'_3 (qui ont pour abcisse $x = p$) où le lieu Σ coupe cette parabole P, passent par les points d'intersection de la parabole P' et de la directrice de la parabole P. Elles ont leur point de concours sur l'axe au point $(x = -p, y = 0)$ qui est le point double du lieu (μ'). Le prolongement de la tangente en M'_3 passera par le point d'intersection D des deux lieux (μ) et (μ'), et celui de la tangente en M_3 passera par le point d'intersection D'.

La parabole P' passe par les deux points d'intersection $\left(-2p, \frac{\pm p}{\sqrt{2}}\right)$ D et D' des deux lieux (μ) et (μ'). Ces deux points D et D' sont tels, que, si de l'un d'eux on mène deux tangentes à la parabole P, la corde de contact est perpendiculaire à l'une de ces deux tangentes au point M'_3 pour D, et pour D' au point M_3 où le lieu Σ coupe la parabole P. L'autre point de contact (M_2 pour D, M'_2 pour D') est celui où la développée de la parabole P coupe cette parabole.

Donc, quand on considère le deuxième mode de génération de la parabole P', les positions du point M, qui sont M_2 pour D et M'_2 pour D', répondent également à la question du problème 15. Le point D' est, relativement à la parabole P, le pôle de la

Digitized by Google

droite $M'_2 M_3$. Le point M'_2 de la développée sera alors sur la parabole P le pied de la normale simple issue de ce point M'_2, et M_3 le pied de la normale double, issue de ce même point M'_2. (Voir fig. 5.)

Il est évident *a priori* que les trois lieux (μ), (μ'), (P') doivent avoir un point commun en D. Le point D est un point du lieu (μ), parce que les tangentes DM_2, DM'_3 ont leur corde de contact perpendiculaire à DM'_3, vu que $M_2 M'_3$ est une normale à la parabole P en M'_3. Le point D est également un point du lieu (μ'), parce que lorsque le point M vient à l'intersection de la parabole P et de la développée de cette parabole en M_2, la normale $M_2 M'_3$ est une normale double, la corde AB devient tangente à la parabole P en M'_3, et cette tangente étant perpendiculaire à la corde de contact qui joint les points $M'_3 M_2$, les deux droites qui, par leur intersection, donnent un point du lieu (μ'), se confondent avec celles qui donnent un point du lieu (μ); donc leur point d'intersection est le même. De même si on considère le point M_2, où la développée de la parabole P coupe cette courbe, la tangente à la parabole P au point M_2, pied de la normale simple, et la tangente au point M'_3, pied de la normale double, se couperont au point D qui, par définition, doit appartenir à la parabole P'. Même remarque pour D'.

Remarque. — La tangente à la développée au point $M_2\,(4p,\ 2p\sqrt{2})$ et la tangente symétrique de celle-là, par rapport à l'axe de la parabole P, sont représentées par l'équation $y = \pm\sqrt{2}\,(x - 2p)$. La première passe par le point $M'_3\,(p,\ -p\sqrt{2})$ de la

Digitized by Google

parabole P, et la seconde par le point $M_3(p, +p\sqrt{2})$. Ces deux tangentes coupent la développée de la parabole P en deux points n et n' $\left(\frac{7p}{4}, \pm\frac{p\sqrt{2}}{4}\right)$ symétriques par rapport à l'axe des x. Ces points n et n' sont ceux où la développée rencontre le lieu des centres des cercles tangents à la parabole P et passant par le foyer de cette parabole. Ce lieu est représenté par l'équation :

$$27py^2 = (4x - p)\left(x - \frac{5p}{2}\right)^2.$$

Si d'un de ces deux points, du point n par exemple $\left(\frac{7p}{4}, \frac{+p\sqrt{2}}{4}\right)$, on mène à la parabole P la normale double et la normale simple, les coordonnées du pied de la première seront $\left(\frac{p}{4}, \frac{-p\sqrt{2}}{2}\right)$, et celles du pied de la seconde seront $(p, +p\sqrt{2})$.

Le cercle passant par le foyer de la parabole P, et ayant son centre en n, sera représenté par l'équation :

$$\left(x - \frac{7p}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{p\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{27p^2}{16}.$$

Il est tangent à la parabole P, au point $(p, +p\sqrt{2})$, pied de la normale simple.

Note sur la courbe μ. — 1° On a donné deux définitions de la courbe μ (hyperbole équilatère de troisième ordre). On peut également l'engendrer comme il suit : cette courbe est le lieu géométrique des extrémités d'une tangente à la parabole P, prolongée

Digitized by Google

au-delà de la directrice de cette parabole d'une longueur égale à celle qui est comprise entre le point de tangence et le point de rencontre de la tangente avec la directrice.

En effet, en éliminant ς entre l'équation de la tangente à la parabole P au point variable $\left(\frac{2\varsigma^2}{p}, 2\varsigma\right)$:

$$(1)\quad px + 2\varsigma y + 2\varsigma^2 = 0$$

et l'équation qui exprime la propriété de l'énoncé :

$$x = -\frac{2\varsigma^2}{p} - p$$

on obtient l'équation : $(\mu)\ 2[x+p]y^2 + p^3 = 0$.

2° La tangente en un point quelconque G de la parabole P coupe la courbe μ en trois points : G_1, G_2, G_3, situés tous trois du côté négatif de l'axe des x. La distance du point G_1 à la directrice de la parabole P est égale à la distance du point G à cette même directrice. La somme des distances des points G_2 et G_3 à la tangente au sommet de la parabole P est égale à la distance du point G à cette même tangente au sommet.

Il résulte des deux propositions précédentes que la somme des distances des trois points G_1, G_2, G_3 à la tangente au sommet de la parabole P, est égale au double de la distance du point G à la directrice de cette parabole.

Les abcisses des points d'intersection de la tangente (1) à la parabole P et de la courbe μ, sont données par une équation du troisième degré, qui se décompose comme il suit :

$$p^2x^3 + p(4\varsigma^2 + p^2)x^2 + 4\varsigma^2(\varsigma^2 + p^2)x + 2\varsigma^2 p(2\varsigma^2 + p^2)$$
$$= (px + 2\varsigma^2 + p^2)(px^2 + 2\varsigma^2 x + 2\varsigma^2 p) = 0.$$

Digitized by Google

Cette décomposition donne immédiatement les distances des trois points G_1, G_2, G_3 à la directrice et à la tangente au sommet de la parabole P, et permet de vérifier les relations de distance indiquées dans l'énoncé.

L'équation de la normale en G à la parabole P :

$$y - \frac{2\beta}{p}\left(x - p - \frac{2\beta^2}{p}\right) = 0$$

montre que cette normale est la polaire du point $G_1\left(-\frac{2\beta^2+p^2}{p}, -\frac{p^2}{2\beta}\right)$. Ce point G_1 étant le pôle de la normale précédente, ses coordonnées sont bien celles d'un des points d'intersection de la tangente en G et de la courbe μ.

Généralisation. — *De quelle équation plus générale l'équation de la courbe μ est-elle un cas particulier?*

1° Si le point $M(x_1, y_1)$ décrit la parabole :

$$py_1^2 - 2k^2(x_1 + k - p) = 0,$$

les trois pôles simples $N(\alpha, \beta)$, sommets du triangle normal circonscrit correspondant au point M, décriront : l'un la perpendiculaire $\alpha - k = 0$ à l'axe de la parabole P, et les deux autres l'hyperbole équilatère du troisième ordre :

$$2(\alpha + k)\beta^2 + pk^2 = 0.$$

Si on prend $k = p$, le point $M(x_1, y_1)$ décrira la parabole $P(y_1^2 - 2px_1 = 0)$, et les trois pôles $N(\alpha, \beta)$ décriront : l'un la droite $\alpha - p = 0$, et les deux autres la courbe μ : $(\mu)\ 2(\alpha + p)\beta^2 + p^3 = 0$.

2° Soient A, B, G les pieds des trois normales menées du point $M(x_1, y_1)$ à la parabole P. Soit

Digitized by Google

$N(\alpha, \beta)$ le pôle de la corde AB. Si ce pôle décrit la perpendiculaire $\alpha - k = 0$ à l'axe de la parabole P, le lieu géométrique du point d'intersection de la tangente en G à la parabole P et du second point d'intersection I de l'hyperbole d'Apollonius (variable, puisque N et M varient), qui passe par les trois points d'incidence A, B, G des normales menées du point $M(x_1, y_1)$ à la parabole fixe P (G étant le premier point d'intersection de la tangente à la parabole et de l'hyperbole), est l'hyperbole équilatère du troisième ordre : $2(x+k)y^2+pk^2=0$, dont la courbe μ est un cas particulier, obtenu en prenant $k=p$.

Démonstration. — 1° Si, dans l'équation de la parabole $py_1^2 - 2k^2(x_1 + k - p) = 0$, on remplace x_1 et y_1 par leur valeur en fonction de α et de β, on obtient : $(\alpha - k)[2(\alpha + k)\beta^2 + pk^2) = 0$, résultat connu.

2° On sait que les coordonnées du point G sont : $\left(\frac{2\beta^2}{p}, -2\beta\right)$. L'équation de la tangente en G à la parabole P sera donc :

$$2\beta y + p\left(x + \frac{2\beta^2}{p}\right) = 0.$$

En éliminant y entre cette équation et celle de l'hyperbole d'Apollonius, dont l'équation :

$$xy + (p - x_1)y - py_1 = 0$$

peut s'écrire :

$$xy + \left(\alpha - \frac{2\beta^2}{p}\right)y + 2\alpha\beta = 0,$$

on obtient l'équation :

$$x^2 + \alpha x - \frac{2\beta^2}{p}\left(\frac{2\beta^2}{p} + \alpha\right) = 0$$

dont les racines sont les abcisses des points G et I.

Digitized by Google

En désignant par X et Y les coordonnées du point I, on a $X = -\left(\frac{2\beta^2}{p} + \alpha\right)$. En remplaçant X par sa valeur dans l'équation de la tangente en G, on obtient : $Y = \frac{p\alpha}{2\beta}$. En remplaçant α par k et en éliminant β entre les relations qui donnent X et Y, on obtient l'équation du lieu demandé : $2(X+k)Y^2 + pk^2 = 0$.

Remarque. — Si, dans ce dernier problème, on suppose que le point $N(\alpha, \beta)$ décrive le diamètre $\beta - k = 0$ de la parabole P (au lieu de la perpendiculaire $\alpha - k = 0$ à l'axe), le lieu géométrique du point I sera la droite représentée par l'équation :

$$p.c + 2k(y + k) = 0.$$

On tire des équations précédentes :

$$\alpha = \frac{Y}{p}\left(-Y \pm \sqrt{Y^2 - 2pX}\right) \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-Y \pm \sqrt{Y^2 - 2pX}}{2}.$$

Généralisons le dernier énoncé. Soit : $f(\alpha, \beta) = 0$ le lieu décrit par le point N. On aura l'équation du lieu du point $I(X, Y)$ en remplacant, dans $f(\alpha, \beta) = 0$, α et β par les valeurs précédentes. On examinera les deux cas suivants :

$$1^o \quad f(\alpha, \beta) = A\alpha + B\beta + C = 0.$$

L'équation générale du lieu du point I est alors : $(2AY + pB)[2AXY + pBX - 2CY] + 2pC^2 = 0$. On en tire celle de la courbe μ en faisant $B = 0$, $C = -Ap$. Autres cas particuliers : $A = 0$; $C = 0$. Et

$$2^o \quad f(\alpha, \beta) = \beta^2 - 2q\alpha = 0$$

L'équation du lieu du point I est alors :

$$X[(32q^2 + 8pq)Y^2 + p^3X] = 0$$

avec les cas particuliers $4q + p = 0$ et $8q + p = 0$. En ce dernier cas, N décrit la parabole P', et l'hy-

Digitized by Google

perbole d'Apollonius devient tangente à la parabole P; car le lieu du point I sera la parabole P elle-même.

PROBLÈME 16. — Lorsque d'un point M (x_1, y_1) déterminé, pris dans le plan de la parabole P, on mène des normales à cette parabole, les pieds de ces normales se trouvent aux points d'intersection de cette courbe et d'une hyperbole équilatère H. Si on cherche le lieu des centres de toutes les coniques qui passent par les points d'intersection du cercle appelé précédemment C et de la parabole P, on trouve que ce lieu est une hyperbole équilatère H'. Le lieu des centres de toutes les coniques qui passent par les les points d'intersection du cercle appelé précédemment C' et de la parabole P est également une hyperbole équilatère H''. On demande de déterminer sur ces deux hyperboles équilatères H' et H'' les parties de ces coniques sur lesquelles se trouvent les centres des ellipses, et celles sur lesquelles se trouvent les centres des hyperboles.

Remarquer que si, dans l'équation de l'hyperbole H, on remplace x par $2x$ et y par $2y$, on obtient l'équation de l'hyperbole H' et que les deux hyperboles H' et H'' deviennent identiques pour $\alpha = p$.

On sait que les points d'incidence des normales menées du point M (x_1, y_1) à la parabole P sont sur une hyperbole équilatère passant par ce point M et asymptote à l'axe de la parabole P. Cette hyperbole équilatère H est représentée par l'équation :

$$(H)\quad xy + (p - x_1)\,y - py_1 = 0.$$

L'équation générale de toutes les coniques qui passent par les points d'intersection du cercle C :

Digitized by Google

$$x^2 + y^2 - (p + x_1)\,x - \frac{y_1}{2}\,y = 0$$

et de la parabole P : $y^2 - 2px = 0$, est :

$$(S)\quad x^2 + (1+\lambda)\,y^2 - (p + x_1 + 2p\lambda)\,x - \frac{y_1}{2}\,y = 0.$$

Le lieu des centres des coniques représentées par cette équation s'obtient en éliminant λ entre les deux équations du centre de cette courbe :

$$2x - (p + x_1) = 2p\lambda \quad , \quad 2y - \frac{y_1}{2} = -2\lambda y.$$

On trouve ainsi l'équation de l'hyperbole équilatère H' :

$$(H')\quad 2xy + (p - x_1)\,y - \frac{py_1}{2} = 0.$$

On voit que si, dans l'équation de l'hyperbole équilatère H, on remplace x par $2x$, y par $2y$, on obtient l'équation de l'hyperbole équilatère H'.

Cherchons maintenant le lieu des centres de toutes les coniques qui passent par les points d'intersection du cercle C' et de la parabole P.

Si nous prenons l'équation du cercle C' sous la forme :

$$x^2 + y^2 - (\alpha + x_1)\,x - (\beta + y_1)\,y + \alpha x_1 + \beta y_1 = 0$$

l'équation générale de toutes ces coniques sera :

$$(S')\quad x^2 + (1+\lambda)\,y^2 - (\alpha + x_1)\,x - 2p\lambda x - (\beta + y_1)\,y + \alpha x_1 + \beta y_1 = 0$$

les équations du centre seront :

$$2x - (\alpha + x_1) - 2p\lambda = 0 \quad , \quad 2(1+\lambda)\,y - (\beta + y_1) = 0.$$

En éliminant λ entre ces deux équations, on trouve l'équation de l'hyperbole équilatère H'' :

$$(H'')\quad xy + \left(p - \frac{\alpha + x_1}{2}\right) y - p\left(\frac{y_1 + \beta}{2}\right) = 0.$$

Si dans cette équation on fait $\alpha = p$, comme les

Digitized by Google

formules de Desboves donnent alors $\beta = -\frac{y_1}{2}$, l'équation (H'') deviendra :

$$2\alpha y + (p - x_1)\, y - \frac{p y_1}{2} = 0.$$

Donc pour la valeur particulière de α : $\alpha = p$, les équations des deux hyperboles équilatères (H') et (H'') deviendront identiques, résultat prévu, puisque pour $\alpha = p$ les deux cercles C et C' se confondent.

L'équation générale des coniques qui passent par les points d'intersection du cercle C et de la parabole P, représentera des hyperboles si on a : $1 + \lambda < 0$. D'après les équations du centre du lieu représenté par l'équation (S), on voit que si y_1 est positif, c'est-à-dire si M est situé au-dessus de l'axe de la parabole P, le centre de toute hyperbole comprise dans l'équation (S) sera situé sur la branche de l'hyperbole équilatère H', qui est placée au-dessous de l'axe de la parabole P ; car les équations du centre donnent pour l'ordonnée d'un centre quelconque : $y = \frac{y_1}{4(1+\lambda)}$. Pour la même raison, on voit que les centres des ellipses comprises dans l'équation (S) se trouvent sur la branche de l'hyperbole équilatère H', qui est située au-dessus de l'axe de la parabole P. Parmi ces centres d'ellipses, on trouvera pour $\lambda = 0$ le centre du cercle C, qui a pour coordonnées : $x = \frac{p + x_1}{2}$, $y = \frac{y_1}{4}$. Les centres des ellipses seront toujours situés sur la branche de H', qui est du même côté de l'axe que le point M, et les centres des hyperboles sur l'autre branche. On obtient celui d'une hyperbole équilatère en prenant : $\lambda = -2$.

Sur la branche de H', sur laquelle sont situés les centres des hyperboles, se trouvent trois centres de

Digitized by Google

couples de deux droites distinctes, ou deux centres confondus en un seul et le troisième distinct, ou un centre unique réel, suivant que les coordonnées du point M satisfont à une des trois conditions :

$$27py_1^2 - 8(x_1 - p)^3 \gtreqless 0.$$

Nous allons le démontrer.

On a vu dans le problème 1 que les pôles doubles communs au cercle C et à la parabole P sont les points communs à l'hyperbole H' et à la parabole e.

L'équation qui donne les abcisses de ces points communs est :

$$8x^3 + 4(p - x_1)x^2 + \frac{p}{2}y_1^2 = 0.$$

Elle aura toujours une racine négative réelle. Pour voir à quelle condition elle aura deux autres racines réelles, on remplace x par $\frac{1}{X}$, et on trouve une équation du troisième degré, dans laquelle la condition de réalité des racines sera : $27py_1^2 - 8(x_1 - p)_3 < 0$.

On voit donc que, suivant que le point $M(x_1, y_1)$ sera situé à l'intérieur, sur la circonférence, ou à l'extérieur de la développée de la parabole P, on aura : trois points d'intersection réels et distincts, ou trois points réels dont deux confondus en un seul, ou un seul point réel d'intersection de la parabole représentée par l'équation $4x^2 + y_1 y = 0$ et de l'hyperbole équilatère H' ; c'est-à-dire trois pôles doubles réels et distincts, communs au cercle C et à la parabole P, trois pôles doubles réels dont deux confondus, ou un seul pôle double réel.

L'équation (S') est l'équation générale des coniques qui passent par les points d'intersection du cercle C' et de la parabole P.

Digitized by Google

De la deuxième équation du centre de ces coniques (S') on tire :

$$y = \frac{\beta + y_1}{2(1+\lambda)}; \quad \text{donc} \quad 1+\lambda = \frac{y_{c'}}{y} \left(\text{car} \quad y_{c'} = \frac{\beta + y_1}{2}\right);$$

y est l'ordonnée d'un quelconque des centres des coniques représentées par l'équation (S'), et $y_{c'}$ est l'ordonnée du centre du cercle C'.

Pour que les coniques représentées par l'équation (S') soient des ellipses, il faut que l'on ait : $1+\lambda > 0$. Si l'ordonnée y d'un centre quelconque est de même signe que l'ordonnée $y_{c'}$ du centre du cercle C', ce centre quelconque sera un centre d'ellipse, car alors on aura $1+\lambda > 0$. Si cette ordonnée y est d'un signe contraire à celui de $y_{c'}$, le centre corrrespondant à cette ordonnée y sera un centre d'hyperbole. Donc, comme une des branches de l'hyperbole H'' est située au-dessus de l'axe de la parabole P et l'autre au-dessous, les centres de toutes les ellipses représentées par l'équation (S') sont situés sur la même branche de la courbe H'' que le centre du cercle C', résultat prévu ; les centres des hyperboles seront situés sur l'autre branche de H''. Par le signe de l'ordonnée :

$$y_c = \frac{1}{2}(\beta + y_1)$$

on voit immédiatement sur quelle branche de H'' est situé le centre du cercle C', branche sur laquelle seront situés les centres des ellipses.

Remarque. — On a vu que pour une position déterminée du point $M(x_1, y_1)$ il y a trois pôles doubles (dont deux peuvent être imaginaires), communs au cercle C et à la parabole P, que ces pôles

Digitized by Google

doubles se trouvent, sur l'hyperbole équilatère H', aux points où elle est rencontrée par la parabole $4x^2 + y_1 y = 0$, et que si le point M est situé sur la développée de la parabole P, deux de ces pôles se confondent. En examinant ce dernier cas, et en se servant de l'équation :

$$8x^3 + 4(p - x_1)x^2 + \frac{py_1^2}{2} = 0$$

qui donne les abcisses des pôles doubles, et en se reportant au problème 6, on trouve :

1° Que les coordonnées des deux pôles doubles, confondus en un seul point N, sont :

$$x = \frac{x_1 - p}{3} \qquad y = -\frac{3p}{2} \times \frac{y_1}{(x_1 - p)} \quad \text{ou} \quad x = \alpha \ , \ y = \beta ;$$

que ce point se trouve sur la parabole P, à l'intersection de cette parabole et de l'hyperbole équilatère H'. (La parabole $4x^2 + y_1 y = 0$ passe également par ce point d'intersection, et est tangente en ce point à la courbe H') ;

2° que les coordonnées du troisième pôle double correspondant à la racine simple de l'équation du troisième degré en x précédente, sont :

$$x = \frac{p - x_1}{6} \qquad y = -\frac{3p}{8} \times \frac{y_1}{(x_1 - p)}$$

ou

$$x = -\frac{\alpha}{2} \qquad y = \frac{\beta}{4} ;$$

que ce troisième pôle double est situé sur la parabole P' à l'intersection de cette parabole et de l'hyperbole équilatère H'. (La parabole $4x^2 + y_1 y = 0$ passe également par ce point d'intersection.) Dans le problème 6, ce troisième pôle double est à l'intersection de la corde OG de la parabole P et de

Digitized by Google

la tangente en A à cette parabole, le point B étant confondu avec A.

PROBLÈME 17. — Démontrer 1° que l'équation de l'hyperbole équilatère H, sur laquelle se trouvent les points d'incidence des normales qu'on mène à une parabole P d'un point $M\ (x_1,\ y_1)$ provient de l'équation plus générale de l'hyperbole équilatère H'', quand dans cette équation plus générale on a comme cas particulier $x_1 = \alpha$, $y_1 = \beta$; et 2° que l'hyperbole équilatère H est le lieu des centres des coniques qui passent par les points d'intersection de la parabole P et d'un cercle C' de rayon nul ayant son centre au point M. Indiquer pour quelle raison les pieds des trois normales menées du point M à la parabole P, doivent se trouver sur ce lieu des centres.

Si dans l'équation :

$$(H'')\ xy + \left(p - \frac{\alpha + y_1}{2}\right) y - p\left(\frac{y_1 + \beta}{2}\right) = 0$$

on a : $x_1 = \alpha$, $y_1 = \beta$, cette équation deviendra :

$$xy + (p - x_1)\, y - p y_1 = 0.$$

On voit que dans ce cas particulier le cercle C' se réduit à son centre qui est alors le point $M\ (x_1,\ y_1)$, et que l'équation de l'hyperbole équilatère H'' devient identique à celle de l'hyperbole équilatère H, dite hyperbole d'Apollonius. Donc l'hyperbole équilatère H, sur laquelle se trouvent les points d'incidence des normales menées d'un point $M\ (x_1,\ y_1)$ à la parabole P, est le lieu des centres des coniques qui passent par l'intersection de la parabole P et d'un cercle C' de rayon nul : $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = 0$,

Digitized by Google

ayant son centre en M. On peut également la définir comme étant le lieu des centres des coniques qui passent par les points d'intersection de la parabole P et de la conique formée par les deux droites isotropes :

$$[x - x_1 + \sqrt{-1}(y - y_1)]\ [x - x_1 - \sqrt{-1}(y - y_1)] = 0$$

menées par le point $M(x_1, y_1)$.

Le calcul vient de démontrer que l'hyperbole équilatère H'', qui est un lieu de centres, devient, dans le cas particulier où on a $x_1 = \alpha$, $y_1 = \beta$, identique à l'hyperbole équilatère H, laquelle, par son intersection avec la parabole P, donne les points d'incidence des trois normales menées du point M à cette parabole P.

Ce résultat du calcul s'explique ainsi : l'équation du cercle C' étant devenue pour $x_1 = \alpha$, $y_1 = \beta$:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = 0$$

l'équation générale des coniques qui passent par les points d'intersection de ce cercle et de la parabole P sera :

$$(S'')\ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + \lambda(y^2 - 2px) = 0.$$

Le lieu des centres de ces coniques (S'') est le même que le lieu des centres des coniques (S''') qui sont représentées par l'équation :

$$(S''')\ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - R^2 - + \lambda(y^2 - 2px) = 0$$

puisque l'équation de ce lieu des centres est indépendante de R.

Ceci posé, si on considère trois cercles ayant leur centre en $M(x_1, y_1)$ et tangents tous trois à la parabole P, leurs rayons seront égaux respectivement à

Digitized by Google

la distance du point M au point d'incidence de chacune des trois normales. Ces trois points de tangence seront à la fois les points d'incidence cherchés et les centres des trois couples de sécantes communes, qui ont leur sommet au point de tangence d'un des trois cercles, et passent par les deux autres points d'intersection de ce cercle et de la parabole. Or, ces centres des trois couples sont compris parmi les centres des coniques représentées par l'équation générale :

$$(S''') \quad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - R^2 + \lambda (y^2 - 2px) = 0$$

(R ayant la longueur d'un quelconque des trois rayons considérés plus haut).

Le lieu des centres de ces coniques S''' passant par les quatre points d'intersection du cercle et de la parabole est une hyperbole équilatère dont l'équation est indépendante de R et qui, en vertu du raisonnement précédent, coupe la parabole P aux trois points d'incidence des normales cherchées. Ce lieu, contenant les centres de toutes les coniques représentées par l'équation S''', passe également par le point M (x_1, y_1) et par le point situé à l'infini sur l'axe de la parabole, car ces deux points sont les centres des coniques que représente l'équation S''' quand on y fait $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$.

Donc cette conique, lieu des centres des coniques S''', coïncide avec l'hyperbole d'Apollonius, puisqu'elle a cinq points communs avec elle (quatre points suffiraient, puisque ce sont des hyperboles équilatères). C'est ce qu'il fallait démontrer.

Digitized by Google

PROBLÈME 18. — Pour une position déterminée du point $M(x_1, y_1)$ sur la parabole P, les trois pôles doubles communs au cercle C et à la parabole P sont les points d'intersection de l'hyperbole H' et de la parabole e, correspondantes à cette position. Si le point M se meut sur cette parabole P, le lieu géométrique des pôles. doubles précédents se composera de la courbe Σ et de la directrice de la parabole P.

On demande : 1° pour une position déterminée du point $M(x_1, y_1)$ sur la parabole P, de chercher les coordonnées de ces trois pôles doubles communs ; 2° de faire cette recherche, dans le cas où on a :

$$x_1 = \frac{9p}{2} \quad , \quad y_1 = 3p.$$

1° Lorsque le point $M(x_1, y_1)$ occupe une position déterminée sur la parabole P, nous savons que deux des centres des couples de sécantes, communes au cercle C et à la parabole P, sont situés sur le lieu Σ, et que le troisième centre, celui qui est toujours réel, est situé sur la directrice de la parabole P. Les deux premiers centres sont réels quand l'abcisse du point M, situé sur la parabole P, sera $x_1 > 4p$, résultat prévu. L'équation (voir problème 16) :

$$8x^3 + 4(p - x_1)x^2 + p\frac{y_1^2}{2} = 0$$

qui donne les abcisses des trois pôles doubles communs au cercle C et à la parabole P, devient dans le cas particulier où le point M est sur la parabole P :

$$8x^3 - 4(p - x_1)x^2 + p^2 x_1 = (2x + p)(4x^2 - 2x_1 x + px_1) = 0.$$

Digitized by Google

Pour cette position du point $M(x_1, y_1)$ sur la parabole P, l'hyperbole équilatère H' sera le lieu de tous les centres des coniques qui passent par les points d'intersection du cercle C et de la parabole P, et contiendra par conséquent, comme l'indique la décomposition de l'équation précédente, outre le centre (pôle double) qui se trouve sur la directrice de la parabole P, les deux pôles doubles communs au cercle C et à la parabole P, qui se trouvent sur la courbe Σ. Ces deux pôles doubles devant se trouver à la fois sur Σ et sur l'hyperbole H', seront parmi les points d'intersection de ces deux courbes. En effet, si on écrit l'équation qui donne les abscisses des points d'intersection de ces deux courbes Σ et H' :

$$16x^5+8(p-2x_1)x^4+4(y_1^2-p^2)x^3-2p(p-x_1)^2x^2-\frac{p^4x_1}{2}=0$$

on remarque que cette équation du cinquième degré se décompose en deux autres :

$$4x^3+2(p-x_1)x^2-p^2x-\frac{p^3}{2}=0$$

$$4x^2-2x_1x+px_1=0.$$

La première donne des abcisses de points d'intersection de l'hyperbole H' et de la courbe Σ étrangers à la question. La seconde donne les abcisses cherchées de deux centres de couples de sécantes communes au cercle C et à la parabole P ; car elle résulte de l'élimination de y entre les équations des courbes e et H'. L'équation de la parabole :

$$(e)\quad 4x^2+y_1y=0$$

qui, par son intersection avec l'hyperbole H', donne les centres des couples de sécantes communes, per-

Digitized by Google

mettra d'obtenir les ordonnées des points dont les abcisses x' et x'' sont les racines de l'équation :

$$4x^2 - 2x_1 x + px_1 = 0.$$

En tenant compte de cette dernière équation, la précédente deviendra : $y_1 y + 2x_1 x - px_1 = 0$ et donnera :

$$\text{avec } x' = \frac{x_1 + \sqrt{x_1(x_1 - 4p)}}{4} : y' = \frac{y_1}{4p}\left[2p - x_1 - \sqrt{x_1(x_1 - 4p)}\right]$$

$$\text{avec } x'' = \frac{x_1 - \sqrt{x_1(x_1 - 4p)}}{4} : y'' = \frac{y_1}{4p}\left[2p - x_1 + \sqrt{x_1(x_1 - 4p)}\right].$$

Les coordonnées du troisième pôle double situé sur la directrice de la parabole P s'obtiennent en cherchant l'intersection de cette directrice et de la parabole $4x^2 + y_1 y = 0$, ou de cette directrice et de l'hyperbole équilatère H', ou de cette directrice et de la corde AB. On trouve :

$$x''' = -\frac{p}{2} \quad , \quad y''' = -\frac{p^2}{y_1}.$$

2° La position particulière du point M que nous considérons, résultera de ce que nous déterminerons le point A par l'intersection de la perpendiculaire élevée sur l'axe au foyer de la parabole P, et de la branche supérieure de cette parabole. Nous joindrons ce point A au point fixe $(-p, 0)$ situé sur l'axe, par lequel passent toutes les cordes AB. La corde AB se trouvera ainsi déterminée. Les normales à la parabole P, élevées aux deux extrémités de la corde AB, se rencontreront sur la parabole P, en un point M qui aura bien les coordonnées de l'énoncé :

Digitized by Google

Coordonnées du point M : $x_1 = \frac{9p}{2}$ $y_1 = -3p$;

» du point A : $\left(\frac{p}{2}, p\right)$;

» du point B : $(2p, 2p)$.

1° Ceci posé, portons dans l'équation de l'hyperbole H' les valeurs indiquées de x_1 et de y_1, l'équation de l'hyperbole H' qui est :

$$(H')\ 2xy + (p - x_1)\, y - \frac{py_1}{2} = 0$$

deviendra $(H')\ 4xy - 7py = 3p^2 = 0.$

De même, en remplaçant y_1 par sa valeur dans l'équation de la parabole $4x^2 + y_1 y = 0$, cette équation deviendra : $4x^2 - 3py = 0$. L'hyperbole H' et cette dernière parabole se couperont en des points dont les abcisses seront racines de l'équation :

$$8x^3 + 4\left(p - \frac{9p}{2}\right)x^2 + \frac{p}{2} \times 9p^2 = 0$$

ou $16x^3 - 28px^2 + 9p^3 = (2x - 3p)(4x - 3p)(2x + p) = 0.$

A chacune de ces racines x', x'', x''' correspondra une valeur : y', y'', y''' donnée par l'équation $4x^2 + y_1 y = 0$ qui est devenue $y = \frac{4x^2}{3p}$, dans laquelle on remplacera successivement x par x', x'', x'''.

A $x' = \frac{3p}{2}$ correspond $y' = 3p$; x' et y' sont les coordonnées du centre du couple OA et BM.

A $x'' = \frac{3p}{4}$ correspond $y'' = \frac{3p}{4}$; x'' et y'' sont les coordonnées du centre du couple OB et AM.

A $x''' = -\frac{p}{2}$ correspond $y''' = \frac{p}{3}$; x''' et y''' sont les coordonnées du centre du couple AB et OM.

Digitized by Google

2° Il nous reste à chercher les équations des droites (*OA* et *BM*) (*OB* et *AM*) (*AB* et *OM*) et à montrer que le point d'intersection des deux droites qui composent chacun de ces trois couples se trouve sur le lieu *R*.

Comme nous connaissons les coordonnées des points *A*, *B*, *M*, nous formons les équations des droites *OA* et *BM* qui sont :

$$(OA)\ y-2x=0\quad,\quad (BM)\ y+x-6p=0.$$

Ces deux droites se coupent en un point qui a pour coordonnées : $x'=\frac{3p}{2}$, $y'=3p$. En substituant ces coordonnées dans l'équation du lieu Σ :

$$(\Sigma)\ y=\pm x\sqrt{\frac{2(2x-p)}{p}}$$

on voit qu'elles satisfont à cette équation ; donc ce premier centre se trouve sur ce lieu Σ.

L'équation du côté *OB* est $y=x$; celle du côté *AM* est $y=\frac{3p}{2}$. Le point d'intersection de ces deux côtés a pour coordonnées : $\left(\frac{3p}{4},\ \frac{3p}{4}\right)$. On vérifie de même que ce point se trouve sur le lieu Σ.

L'équation du côté *AB* est $y=\frac{2}{3}(x+p)$; celle du côté *OM* est $y=-\frac{2}{3}x$. Les coordonnées du point de rencontre des deux droites de ce couple sont :

$$\left(-\frac{p}{2}\ ,\ \frac{p}{3}\right).$$

On voit qu'elles se coupent sur la directrice de la parabole *P*. Comme cette directrice fait partie du lieu *R*, la proposition de l'énoncé est vérifiée.

Digitized by Google

Ainsi pour chaque valeur particulière des coordonnées x_1, y_1 du point M situé sur la parabole P, on a une hyperbole équilatère H' et une parabole $4x_2 + y_1 y = 0$ correspondantes à ces valeurs de x_1 et de y_1, et trois centres correspondants de couples de sécantes communes à la circonférence de cercle C et à la parabole P. Mais tous les centres de ces couples, pour toutes les positions du point M sur la parabole P, se trouvent sur le lieu R, composé de la courbe Σ et de la directrice de la parabole P.

Il résulte des problèmes précédents que le lieu Σ est 1° le lieu des centres de deux couples de sécantes communes au cercle C et à la parabole P, quand le point M décrit cette parabole ; 2° un lieu des points d'intersection de l'hyperbole équilatère H' et de la parabole $4x^2 + y_1 y = 0$ quand le point M décrit la parabole P. (Outre la courbe Σ, le lieu complet de ces points d'intersection comprend la directrice de la parabole P) ; 3° le lieu décrit par le centre de la circonférence C' quand le point $M(x_1, y_1)$ décrit la directrice de la parabole P. Ultérieurement on indiquera une quatrième propriété de cette courbe Σ.

Remarque. — Dans cette série de problèmes, on a eu successivement à exprimer les coordonnées de divers points en fonction des coordonnées du point $N(\alpha, \beta)$ duquel on a mené deux tangentes à la parabole P.

Digitized by Google

Ces divers points étaient :

1° le point $M(x_1, y_1)$, intersection des normales aux points de contact de ces deux tangentes;

2° le point (x_c, y_c), centre du cercle C ;

3° le point $(x_{c'}, y_{c'})$, centre du cercle C' ;

4° le point (x_a, y_a), sommet de la parabole P'' qui passe par les points d'intersection de la parabole P et du cercle C ;

5° le point (x_f, y_f), foyer de cette même parabole P''.

6° le point $(x_{a'}, y_{a'})$, sommet de la parabole P''' qui passe par les points d'intersection de la parabole P et du cercle C'.

Quand on connaîtra le lieu géométrique décrit par un de ces sept points (en comprenant le point $N(\alpha, \beta)$ dans ce nombre), il sera en général facile (au moyen des valeurs de ces coordonnées exprimées en fonction de α et de β) de déduire de l'équation de ce lieu celle des lieux décrits simultanément par les six autres points.

$$x_1 = \frac{2\beta^2 - \alpha p + p^2}{p} \quad ; \quad y_1 = -\frac{2\alpha\beta}{p}$$

$$x_c = \frac{2\beta^2 - \alpha p + 2p^2}{2p} \quad ; \quad y_c = -\frac{\alpha\beta}{2p}$$

$$x_{c'} = \frac{2\beta^2 + p^2}{2p} \quad ; \quad y_{c'} = \frac{\beta(p - 2\alpha)}{2p}$$

$$x_a = \frac{2\beta^2 - \alpha p}{2p} \quad ; \quad y_a = \frac{(2\beta^2 - \alpha p)^2}{4p\alpha\beta}$$

$$x_{a'} = \frac{2\beta^2 - p^2}{2p} \quad ; \quad y_{a'} = \frac{4p^2\alpha(p - \alpha) - (2\beta^2 - p^2)^2}{4p\beta(p - 2\alpha)}$$

$$x_f = \frac{2\beta^2 - \alpha p}{2p} \quad ; \quad y_f = \frac{(2\beta^2 - \alpha p)^2}{4p\alpha\beta} \mp \frac{\alpha\beta}{4p}.$$

Digitized by Google

Les problèmes auxquels donnent lieu les considérations précédentes, ne se bornent point à la recherche des lieux géométriques décrits par les six points précédents, quand le septième point varie de position sur une courbe déterminée. Le problème suivant offre des applications de cette méthode et de ces formules à d'autres cas.

PROBLÈME 19. — Le point $N(\alpha, \beta)$ se meut sur une parallèle $y - k = 0$ à l'axe de la parabole P (k est donné). Si nous considérons successivement les deux cercles précédemment appelés C et C', et si la polaire AB du point N est une sécante commune aux trois courbes C, C', P, la corde OG, qui est la deuxième sécante commune au cercle C et à la parabole P, et la corde EF, qui est la deuxième sécante commune au cercle C' et à cette même parabole P, sont parallèles, ainsi que nous l'avons démontré. Ceci posé,

1° Pendant que le point N décrira la parallèle donnée à l'axe dans chaque position qu'occupera alors le cercle C, on lui mènera deux tangentes parallèles à la sécante OG commune dans cette position au cercle C et à la parabole P. Démontrer que le lieu des points de contact de ces tangentes au cercle C variable est une droite U.

2° De même à chaque cercle C', on mènera deux tangentes parallèles à la corde EF, qui correspond à ce cercle C'. Démontrer que le lieu des points de contact de ces tangentes au cercle C' est une hyperbole V dont l'axe de la parabole P est une asymptote.

3° On sait que pour la position particulière $\alpha = p$ du point N sur le diamètre $y - k = 0$ de la para-

Digitized by Google

bole P, les deux cercles C et C' se confondent. Calculer pour cette position du point N les coordonnées des points de contact des tangentes précédentes aux deux cercles confondus, premièrement en considérant ces points de contact comme les points d'intersection des deux lieux géométriques U et V précédemment obtenus ; deuxièmement en les déterminant directement sur le cercle C dans la position particulière qu'occupera ce cercle quand le point N aura une abcisse égale au paramètre p de la parabole P et une ordonnée égale à k ;

Donner une construction géométrique de la droite U, et déterminer de même sur cette droite les deux points de contact particuliers demandés.

4° Pendant que le point $N(\alpha, \beta)$ décrit le diamètre donné, $\beta - k = 0$ de la parabole P, quels seront les lieux géométriques décrits par le point $M(x_1, y_1)$, par le centre (x_c, y_c) du cercle C, par le centre $(x_{c'}, y_{c'})$ du cercle C' ?

5° Quand le point $N(\alpha, \beta)$ se meut sur le diamètre $\beta - k = 0$ de la parabole P, démontrer qu'un des trois pôles doubles communs au cercle C et à la parabole P décrira la corde OG, et que les deux autres décriront une hyperbole équilatère ;

Quelles positions le point N doit-il occuper sur le diamètre $\beta - k = 0$, pour qu'il y ait : 1° trois pôles doubles réels et distincts, 2° trois pôles doubles réels dont deux confondus, 3° un seul pôle double réel ?

6° Dans cette même hypothèse : (N se meut sur un diamètre donné : $\beta - k = 0$ de la parabole P), le lieu décrit par les trois pôles doubles communs au cercle C' et à la parabole P se compose de la directrice de la parabole P et d'une courbe du troisième degré.

Digitized by Google

Un de ces trois pôles doubles décrira cette directrice, quel que soit le lieu sur lequel se meuve le point N.

Combien le cercle C' et la parabole P ont-ils de points réels communs quand le point N, en restant sur le diamètre $\xi - k = 0$, varie de position relativement à la parabole P et la parabole :

$$\xi^2 - 2p(p - \alpha) = 0 ?$$

7° L'équation de la courbe Σ est un cas particulier d'une équation plus générale.

En supposant que le point $N(\alpha, \xi)$ décrive une perpendiculaire donnée : $(\alpha - k = 0)$ à l'axe de la parabole P, le lieu des pôles doubles communs au cercle C et à la parabole P se composera de la droite $2x + k = 0$ et de la courbe :

$$k^2 y^2 - 2px^2 (2x - k) = 0.$$

Le lieu des pôles doubles communs au cercle C' et à la parabole P se composera de la directrice de la parabole P et de la courbe :

$$(p - 2k)^2 y^2 - 2p(x^2 + k^2 - kp)(2x - p) = 0.$$

En introduisant, comme cas particulier, dans les deux équations précédentes du troisième degré l'hypothèse $k = p$, on retrouve l'équation de la courbe Σ, lieu de deux pôles doubles communs à la parabole P et aux cercles C et C' confondus en un cercle unique, le troisième pôle double décrivant la directrice de la parabole P.

Dans l'hypothèse $k = 0$, l'équation :

$$(p - 2k)^2 y^2 - 2p(x^2 + k^2 - kp)(2x - p) = 0$$

se réduit également à celle de la courbe Σ.

Digitized by Google

Donc, quand le point $N(\alpha, \beta)$ décrit la tangente au sommet de la parabole P, le lieu des pôles doubles communs à cette parabole et au cercle C' se compose de la directrice de la parabole P et de la courbe Σ.

1° Le cercle C esi représenté par l'équation :

$$x^2 + y^2 - (x_1 + p)\,x - \frac{y_1}{2}\,y = 0.$$

Des formules de Desboves on tire :

$$x_1 = \frac{2\beta^2 - \alpha p + p^2}{p} \quad ; \quad y_1 = -\frac{2\alpha\beta}{p}.$$

Si on donne $\beta = k$, il vient :

$$x_1 + p = 2\frac{k^2 + p^2}{p} - \alpha \quad ; \quad \frac{-y_1}{2} = \frac{k\alpha}{p}.$$

Les deux points de contact sont sur la perpendiculaire abaissée du centre $\left(\frac{x_1 + p}{2}, \frac{y_1}{4}\right)$ sur la droite OG. Cette perpendiculaire est représentée par l'équation :

$$(U)\quad y - \frac{k}{p}\left(x - p - \frac{k^2}{p}\right) = 0.$$

Comme cette équation est indépendante de α, on voit qu'elle représente le premier lieu demandé.

2° L'équation du cercle C' est :

$$x^2 + y^2 - (\alpha + x_1)\,x - (\beta + y_1)\,y + \alpha(p - \alpha) = 0.$$

Les deux points de contact cherchés sont sur la per-

Digitized by Google

pendiculaire abaissée du centre $\left(\frac{\alpha+x_1}{2}, \frac{\beta+y_1}{2}\right)$ du cercle C' sur la droite EF, parallèle à OG. L'équation de cette perpendiculaire est :

$$y - \frac{\beta+y_1}{2} - \frac{k}{p}\left(x - \frac{\alpha+x_1}{2}\right) = 0 ;$$

on a : $\alpha + x_1 = \frac{2k^2+p^2}{p}$, $\beta + y_1 = k - \frac{2k}{p}\alpha$.

En introduisant ces valeurs dans l'équation précédente, il vient :

$$(1)\quad y - \frac{k}{p}x + \frac{k^3}{p^2} + \frac{k\alpha}{p} = 0.$$

Les points de contact se trouvent sur cette perpendiculaire et sur le cercle C'. On remplace α par sa valeur tirée de l'équation (1) dans l'expression de $\beta + y_1$ et dans le terme tout connu de l'équation du cercle C' ; on a ainsi :

$$\beta + y_1 = 2y - \frac{2kx}{p} + k + \frac{2k^3}{p^2},$$

$$\alpha(p-\alpha) = -x^2 + \frac{2p}{k}xy - \frac{p^2}{k^2}y^2$$
$$+ \frac{2k^2+p^2}{p}x - \frac{2k^2+p^2}{k}y - \frac{k^2}{p^2}(k^2+p^2).$$

En portant dans l'équation du cercle C' les valeurs trouvées pour $\alpha + x_1$, $\beta + y_1$ et $\alpha(p-\alpha)$, on obtient l'équation du lieu demandé :

$$(V)\quad y[p^2y - 2kpx + k(2k^2+p^2)] + k^4 = 0.$$

Ce lieu est une hyperbole dont l'axe de la parabole P est une asymptote ; le coefficient angulaire de

Digitized by Google

l'autre asymptote est égal à $\frac{2k}{p}$; le centre est situé au point $\left(\frac{2k^2+p^2}{p}, 0\right)$ sur l'axe de la parabole P.

3° On sait que pour $\alpha = p$, les deux cercles C et C' se confondent, car pour cette valeur de α, ils passent tous deux par les trois points A, B, G, le point G s'étant confondu avec le point M. Les deux cercles confondus ayant les mêmes tangentes parallèles à la corde OG, les deux points de contact sur ces cercles se confondent également. Donc, pour cette position des cercles C et C', ces points de contact se trouvent à la fois sur la droite U qui est le lieu géométrique de ces points situés sur le cercle C, et sur l'hyperbole V qui est le lieu géométrique de ces points situés sur le cercle C'. Il en résulte que ces points de contact sont à l'intersection de la droite U et de l'hyperbole V. On calculera leurs coordonnées en résolvant les équations simultanées U et V, et on obtiendra :

$$x' = \frac{p^2+2k^2}{2p} + \frac{1}{2}\sqrt{p^2+4k^2},$$

$$x'' = \frac{p^2+2k^2}{2p} - \frac{1}{2}\sqrt{p^2+4k^2},$$

$$y' = -\frac{k}{2} + \frac{k}{2p}\sqrt{p^2+4k^2},$$

$$y'' = -\frac{k}{2} - \frac{k}{2p}\sqrt{p^2+4k^2}.$$

On obtiendrait également les coordonnées de ces points de contact dans l'hypothèse $\alpha = p$, en remarquant que ces points se trouvent, dans ce cas, à

Digitized by Google

l'intersection de la droite U et des deux cercles C et C', confondus et représentés par l'équation :

$$x^2 + y^2 - \left(p + \frac{2k^2}{p}\right) x + ky = 0.$$

En résolvant cette équation et celle de la droite U prises simultanèment, on tombe sur les valeurs de x', x'', y', y'' trouvées précédemment.

Par la géométrie, on voit que si le point N décrit un diamètre $\beta - k = 0$ de la parabole donnée, toutes les cordes AB seront parallèles, puisque les tangentes aux extrémités de ces cordes se coupent sur le diamètre $\beta - k = 0$ conjugué de leur direction. Les cordes AB etant toutes parallèles, les cordes OG ont toutes la même direction, qui fait avec l'axe de la parabole P le même angle que celui des cordes AB avec le même axe, mais de signe contraire. Comme toutes ces cordes OG passent par un point fixe O, elles coïncident. Tous les cercles C passent, dans le cas considéré, par deux points fixes O et G. La perpendiculaire élevée au milieu de OG qui, par son intersection avec le cercle C, doit donner les points de contact cherchés, est donc elle-même le lieu U de ces points de contact. Le point G se déterminera en menant par le sommet O de la parabole P une droite qui fasse avec l'axe de cette parabole, au-dessous de cet axe, le même angle que la droite AB fait avec cet axe au-dessus de lui. Les points de contact, dans le cas particulier où on a $\alpha = p$, s'obtiendront, ainsi qu'il a été dit, par l'intersection de la droite U avec le cercle décrit sur NG comme diamètre. N se trouve à l'intersection du diamètre

Digitized by Google

$\beta - k = 0$ de la parabole P et de la perpendiculaire $\alpha - p = 0$ à l'axe de cette parabole ; le point M, dans ce cas, se confond avec le point G.

4° Cette droite U est le lieu des centres des cercles C, puisque le centre de chacun de ces cercles se trouve sur la perpendiculaire élevée au milieu de OG.

D'après l'énoncé, le centre du cercle C' est le milieu de la droite NM. Les coordonnées du point N étant (α, β), et celles du point M étant (x_1, y_1), on a, en désignant par x l'abcisse du centre du cercle C' : $x = \frac{\alpha + x_1}{2}$. En remplaçant x_1 par sa valeur en fonction de α, β tirée des formules de Desboves, et en remarquant que $\beta = k$, on a : $x = \frac{2k^2 + p^2}{2p}$. Le lieu des centres des cercles C' est donc représenté par l'équation :

$$x - \frac{p}{2} - \frac{k^2}{p} = 0.$$

Si la normale à la parabole P, élevée au point G, coupe l'axe en L, le lieu des centres des cercles C' sera la perpendiculaire élevée sur l'axe au milieu de OL. On obtient également cette droite, en abaissant du milieu de la droite NM, c'est-à-dire de NG, une perpendiculaire sur l'axe.

On peut encore raisonner comme il suit. On a :

$$x_1 + \alpha = p + \frac{2k^2}{p}.$$

Or $x_1 + \alpha$ représente le double de l'abcisse d'un centre quelconque du cercle variable C'. D'un autre côté,

Digitized by Google

$p + \frac{2k^2}{p}$ représente la somme de la sous-normale p au point fixe G et de l'abcisse de ce même point ; cette somme est égale à la distance du sommet O de la parabole au point L, où la normale au point fixe G rencontre l'axe. Donc le centre du cercle C' décrit une perpendiculaire à l'axe, élevée au milieu de la distance du sommet au point L, où la normale en G rencontre l'axe.

Le lieu du point M est la normale élevée à la parabole au point G, c'est-à-dire au point où la droite, menée par le sommet avec la même inclinaison sur l'axe que celle de AB, mais de l'autre côté de l'axe, rencontre la parabole.

Si on désigne par x et y les coordonnées du point M, les formules de Desboves donnent :

$$-\alpha = \frac{py}{2k} = x - p - \frac{2k^2}{p}.$$

Le lieu du point M est donc représenté par l'équation :

$$y - \frac{2k}{p}\left(x - p - \frac{2k^2}{p}\right) = 0$$

qui est l'équation de la normale en G, point dont les coordonnées sont : $\left(\frac{2k^2}{p}, -2k\right)$.

Cette normale passe par le centre de courbure correspondant au point d'intersection de la parabole et du diamètre donné. En appelant X_1 et Y_1 les coordonnées du centre de courbure correspondant au point (α, k), il suffit de faire $\beta^2 = k^2 = 2p\alpha$ dans les formules de Desboves pour obtenir :

Digitized by Google

$$X_1 = \frac{3k^2}{2p} + p \quad \text{et} \quad Y_1 = -\frac{k^3}{p^2}.$$

Pour obtenir géométriquement le lieu décrit par le point M, il suffit de faire la remarque suivante : Le point M se trouvant toujours sur la normale élevée en G à la parabole P, et ce point G étant fixe, le lieu du point M sera cette normale en G elle-même.

5° Dans les formules du problème 1, qui donnent les coordonnées du point $M(x_1, y_1)$ en fonction des coordonnées (x, y) d'un pôle double commun au cercle C et à la parabole P, on a pris ce point $M(x_1, y_1)$ de préférence au point $N(\alpha, \beta)$ qui a été employé dans le tableau des autres formules, parce que l'équation qui donne α et β en fonction de x et y est du troisième degré.

Si, lorsqu'on connaît le lieu décrit par le point $N(\alpha, \beta)$, on demande le lieu décrit par le pôle double (x, y), on peut, dans certains cas, déduire de l'équation du lieu décrit par le point N, celle du lieu que décrit le point $M(x_1, y_1)$. Ensuite, au moyen des formules du problème 1, on déduit de ce dernier lieu celui que décrivent les pôles doubles (x, y). La question posée ici en est un exemple. Le point N décrit un diamètre donné : $\beta - k = 0$. De l'équation de ce lieu on déduit celle du lieu décrit par le point $M(x_1, y_1)$, qui est celle de la normale en G :

$$y_1 = \frac{2k}{p}\left(x_1 - p - \frac{2k^2}{p}\right).$$

Il suffit, dans cette équation, de remplacer x_1 et y_1 par leur valeur en fonction de x et de y, tirée

Digitized by Google

des formules du problème 1. Les formules donnent :

$$x_1 = p + \frac{2x(y^2 + px)}{y^2} \quad , \quad y_1 = -\frac{4x^2}{y}.$$

Cette substitution opérée, on tombe sur l'équation d'un lieu du troisième degré qui se décompose en celle de la corde OG et en celle d'une hyperbole équilatère :

$$(ky + px)[pxy - k(px - ky)] = 0.$$

Les asymptotes de cette hyperbole sont parallèles aux axes de coordonnées ; elle a son centre au point $\left(\frac{k^2}{p}, -k\right)$, sur la droite $ky + py = 0$. Cette hyperbole passe par l'origine et coupe les axes en des points situés sur la droite $px - ky = 0$, menée par l'origine parallèlement à AB.

Le discriminant de l'équation (S) :

$$(S) \quad x^2 + (1+\lambda)y^2 - [p + x_1 + 2p\lambda]x - \frac{y_1}{2}y = 0$$

peut, en l'égalant à 0, se mettre sous la forme :

$$\left(1 + \lambda + \frac{\beta^2}{p^2}\right)[4p^2(1+\lambda)^2 + 4(\beta^2 - p\alpha)(1+\lambda) + \alpha^2] = 0.$$

Le couple qui correspond à la racine :

$$1 + \lambda = -\frac{\beta^2}{p^2}$$

se compose des sécantes AB et OG. Comme la droite OG est invariable, ce couple aura toujours son centre sur OG. C'est pourquoi le lieu d'un des pôles doubles communs au cercle C et à la parabole P est la corde

Digitized by Google

représentée par l'équation : $ky + px = 0$, corde qui passe par le sommet de la parabole et qui fait avec l'axe un angle égal (mais de signe contraire) à celui que font avec le même axe les cordes que le diamètre donné divise en deux parties égales.

Quant aux deux autres pôles qui se trouvent sur l'hyperbole équilatère : $pxy - k(ky - px) = 0$, on remarque qu'ils sont imaginaires dans le cas où le cercle C et la parabole P ont deux points d'intersection imaginaires. Le cas de trois racines réelles de l'équation en λ avec quatre points d'intersection imaginaires ne peut se présenter ici. Parmi les points d'intersection du cercle C et de la parabole P, il y en a toujours deux réels : le sommet O et G, et deux autres qui peuvent être réels ou imaginaires. Il en résulte qu'on aura deux pôles doubles imaginaires quand l'équation du second degré en $1 + \lambda$ aura ses deux racines imaginaires, c'est-à-dire quand on aura $k^2 - 2p\alpha < 0$, et deux pôles doubles confondus quand on aura $k^2 - 2p\alpha = 0$.

En d'autres termes, quand le point N sera intérieur à la parabole P $\left(\alpha > \frac{k^2}{2p}\right)$, on aura deux pôles doubles imaginaires et un seul pôle double réel : celui qui est situé sur la corde OG. Quand le point N sera situé à l'intersection du diamètre donné et de la parabole P $\left(\alpha = \frac{k^2}{2p}\right)$, on aura deux pôles doubles confondus. On sait que, dans ce cas, la corde AB est tangente à la parabole P et au cercle C en N.

On arrive aux mêmes conclusions par le raisonnement suivant : Si on cherche les points d'intersection du cercle C et de la parabole P, on remarque que ces points d'intersection sont ceux où la corde

Digitized by Google

OG et la sécante AB coupent la parabole P. On connaît les points O et G d'intersection de la corde OG et de la parabole P. Le problème revient donc à trouver les points d'intersection de la sécante AB et de la parabole. Or, si nous cherchons les abcisses de ces points d'intersection, nous voyons qu'elles sont données par une équation du deuxième degré, qui a ses racines toujours de même signe. La condition de réalité de ces racines est $k^2 - 2p\alpha > 0$. Deux pôles doubles communs au cercle C et à la parabole P seront réels et distincts, réels et confondus, ou imaginaires, suivant que la sécante AB coupe la parabole P en deux points réels, lui est tangente ou ne la coupe point. On retombe ainsi sur les résultats déjà obtenus précédemment.

Les deux pôles doubles qui ne se trouvent pas sur OG, sont situés sur l'hyperbole équilatère :

$$pxy - k(ky - px) = 0.$$

Mais dans le cas où on a : $k^2 - 2p\alpha = 0$, ces deux pôles doubles se confondent avec le point N qui, étant alors à la fois sur la parabole P et sur cette hyperbole équilatère, se trouve à l'intersection de ces deux courbes. Si on cherche les coordonnées des points communs à cette hyperbole équilatère et à la parabole P, on trouve que ces coordonnées sont, abstraction faite du point situé à l'infini :

$$x' = 0 \quad , \quad y' = 0 \quad , \quad x'' = \frac{k^2}{2p} \quad , \quad y'' = k \; ;$$
$$x''' = \frac{2k^2}{p} \quad , \quad y''' = -2k.$$

Digitized by Google

Le point A, confondu avec le point G, qui a pour coordonnées : $x''' = \frac{2k^2}{p}$, $y''' = -2k$, est le pôle double correspondant à la position du point $N(\alpha, k)$ sur la parabole P' $(4\xi^2 + p\alpha = 0)$. En ce cas, la racine $1 + \lambda = -\frac{\xi^2}{p^2}$ annule également l'équation du deuxième degré en $1 + \lambda$. Le couple correspondant à cette racine double se compose de la corde AO et de la polaire AB du point $N(\alpha, k)$ situé sur la parabole P'. Ce couple représenté par l'équation :

$$(ky + px)(ky - px - p\alpha) = 0$$

a son centre $\left(-\frac{\alpha}{2} = \frac{2k^2}{p} , -2k\right)$ sur la parabole P au point de tangence A de cette parabole et du cercle C. Ainsi qu'on a vu, le point G s'est confondu avec le point A, et en ce point, la tangente commune au cercle et à la parabole est représentée par l'équation : $px + 2k(y + k) = 0$.

Les abcisses des points d'intersection de la sécante AB : $ky - p(x + \alpha) = 0$ et de la parabole P sont :

$$x = \frac{k^2 - \alpha p}{p} \pm \frac{k}{p}\sqrt{k^2 - 2p\alpha}.$$

Pour $k^2 - 2p\alpha = 0$, on trouve ainsi l'abcisse α du point N, à laquelle correspond l'ordonnée k du même point. Pour $4k^2 + p\alpha = 0$, on trouve :

$$x_1 = \frac{8k^2}{p} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{2k^2}{p}$$
$$y_1 = 4k \qquad\qquad y_2 = -2k.$$

Les coordonnées x_2 et y_2 sont celles du point G, ainsi qu'on voit en cherchant les coordonnées des points d'intersection de la corde $ky + px = 0$ et de

Digitized by Google

la parabole P. Donc les coordonnées des deux points A et G, confondus en un point unique A, sont $\left(-\frac{\alpha}{2}=\frac{2k^2}{p},\ -2k\right)$, et les coordonnées du point B, situé à l'autre extrémité de la polaire AB du point N par rapport à la parabole P, sont :

$$\left(8\frac{k^2}{p}=-2\alpha\ ,\ 4k\right).$$

Le couple correspondant à la racine simple $\frac{\alpha}{p}$ se compose de OB et de la tangente en A. Il a pour centre le point $\left(\frac{\alpha}{4}\ ,\ \frac{-\beta}{2}\right)$ situé sur la parabole P'.

6° L'équation générale des coniques qui passent par les points d'intersection du cercle C' et de la parabole P est :

$$(S')\ x^2+(1+\lambda)y^2-\left(\frac{2\beta^2+p^2}{p}+2p\lambda\right)x-\frac{\beta(p-2\alpha)}{p}y+\alpha(p-\alpha)=0.$$

On suppose que le point $N(\alpha, \beta)$ décrive le diamètre $\beta-k=0$ de la parabole P. Si entre les deux équations du centre de ces coniques et l'équation de la polaire de l'origine on élimine α et λ, on obtient l'équation du lieu décrit par les trois pôles doubles communs à ce cercle C' et à la parabole P. L'équation de ce lieu est :

$$(2x+p)\left[p(2x+p)-2k^2\right)y^2+pk^2(2x-p)]=0.$$

Un des pôles doubles décrit donc la directrice de la parabole P, et les deux autres un lieu du troisième ordre.

Digitized by Google

Le couple de sécantes communes à la parabole P et au cercle C', qui se compose des deux droites AB et EF, est représenté par les deux équations :

$$ky - p(x + \alpha) = 0 \qquad \text{et} \qquad ky + p(x + p - \alpha) = 0.$$

On voit que, quel que soit le lieu décrit par le point $N(\alpha, \beta)$, les deux droites :

$$\beta y - p(x + \alpha) = 0 \qquad \text{et} \qquad \beta y + p(x + p - \alpha) = 0$$

se coupent toujours sur la directrice de la parabole P. Il suffit, pour le démontrer, de remarquer que l'abscisse du point d'intersection de ces deux sécantes est égale à $-\frac{p}{2}$ et indépendante de α et de β.

Si on prend le discriminant de l'équation (S'), et si on l'égale à 0, on remarque qu'il peut se décomposer comme il suit :

$$\left(1 + \lambda + \frac{\beta^2}{p^2}\right)\left|4p^2(1+\lambda)^2 + 4(\beta^2 - p^2)(1+\lambda) + (p-2\alpha)^2\right| = 0.$$

Le couple AB, EF est celui qui correspond à la racine $1 + \lambda = -\frac{\beta^2}{p^2} = -\frac{k^2}{p^2}$ (car pour $\beta - k = 0$, il faut remplacer dans l'équation précédente β par k.

On peut, au moyen de l'équation précédente en $1 + \lambda$, voir à quelles positions du point $N(\alpha, \beta)$ correspondent les cas de tangence du cercle C' et de la parabole P, et les cas de réalité des pôles doubles communs à ces deux courbes.

On trouve plus simplement le résultat demandé, en cherchant directement les coordonnées des points d'intersection du cercle C' et de la parabole P, ou, ce qui revient au même, les coordonnées des points de rencontre de la parabole P et des deux sécantes AB, EF, communes au cercle C' et à cette para-

Digitized by Google

bole P. On cherche séparément les points d'intersection de la sécante AB et de la parabole P, de la sécante EF et de cette même parabole.

Nous allons employer successivement ces deux méthodes, en commençant par celle de l'équation en λ.

Première méthode. — L'équation du second degré en $1+\lambda$ aura ses deux racines égales, si on a soit :

$$\beta^2 - 2p\alpha = 0, \quad \text{soit} \quad \beta^2 + 2\alpha p - 2p^2 = 0.$$

Dans la première hypothèse ($\beta^2 - 2p\alpha = 0$), le point $N(\alpha, \beta)$ est sur la parabole P, et les points A et B se confondent avec N. Le point $M(x_1, y_1)$ est sur la développée. Le couple de sécantes communes au cercle C' et à la parabole P, qui correspond à cette racine double, aura deux pôles doubles au point $N(\alpha, \beta)$ sur la parabole P confondus en un seul, et les deux droites NE, NF de ce couple seront représentées par l'équation :

$$2p^2x^2 + (p^2 - \beta^2)y^2 - 2p\beta^2 x + 2p\beta(2\alpha - p)y + 2p^2\alpha(p - \alpha) = 0,$$

ou bien en simplifiant : $y - \beta = \pm\sqrt{\dfrac{2p}{2\alpha - p}}(x - \alpha)$.

Ainsi qu'on a vu, le pôle double qui correspond à la racine simple, est sur la directrice. Le couple qui a le pôle double pour centre, se compose de la sécante AB, devenue tangente en A, le point B s'étant confondu avec A, et de la sécante EF.

Dans la deuxième hypothèse : $\beta^2 - 2p(p - \alpha) = 0$, la sécante EF $\beta y + p(x + p - \alpha) = 0$ devient tangente au cercle C' et à la parabole P au point E avec lequel se confond le point $F(x = p - \alpha,\ y = -\beta)$.

Digitized by Google

EA, EB seront les deux droites de ce couple, correspondant à la racine double : $1+\lambda=\frac{2\alpha-p}{2p}$.

Le couple correspondant à la racine simple se composera de la tangente en E et de la sécante AB. Il a son centre sur la directrice.

La racine $1+\lambda=-\frac{\beta^2}{p^2}$ ne peut convenir à l'équation du deuxième degré en $1+\lambda$ que si le point N est au foyer de la parabole P. En ce cas, la racine double $\lambda=-1$ donne un couple de deux droites se confondant avec la directrice de la parabole P, et la racine simple $\lambda=0$ donne un couple de deux droites isotropes ayant son centre au foyer.

Deuxième méthode. — La sécante AB est représentée par l'équation $ky-p(x+\alpha)=0$. Elle coupe la parabole P en deux points réels et distincts si on a $k^2-2p\alpha>0$, en deux points réels et confondus si on a $k^2-2p\alpha=0$.

De même, la sécante EF : $ky+p(x+p-\alpha)=0$ coupe la parabole P en deux points réels et distincts si on a $k^2-2p(p-\alpha)>0$, réels et confondus si on a $k^2-2p(p-\alpha)=0$. Mais si aucune des sécantes AB et EF ne coupe la parabole P, les trois pôles doubles restent réels, quoique le cercle C' et la parabole P n'aient en ce cas aucun point réel commun. Il n'y a deux pôles doubles imaginaires que si le produit $(k^2-2p\alpha)[k^2-2p(p-\alpha)]$ est négatif.

C'est le cas où la position du point $N(\alpha, \beta)$ sur le diamètre $\beta-k=0$ est telle que ce point se trouve placé intérieurement à l'une des paraboles :

$$y^2-2px=0 \quad ; \quad y^2-2p(p-x)=0$$

Digitized by Google

et extérieurement à l'autre. Si la position du point N sur le diamètre $\eta - k = 0$ est telle qu'il se trouve placé à l'intérieur de ces deux paraboles, il y aura trois pôles doubles réels, communs au cercle C' et à la parabole P, quoique les deux sécantes ne coupent pas la parabole P.

Si on a simultanément :

$$k^2 - 2p\alpha > 0 \qquad \text{et} \qquad k^2 - 2p(p - \alpha) > 0,$$

les deux sécantes AB et EF coupent chacune la parabole P en deux points réels ; il y aura en ce cas trois pôles doubles réels.

Si on a $k^2 - 2p\alpha = 0$, la sécante $ky - p(x + \alpha) = 0$ est représentée par l'équation :

$$ky - p\left(x + \frac{k^2}{2p}\right) = 0 ;$$

elle devient tangente en $N(\alpha, \beta)$, dont les coordonnées sont $\left(\frac{k^2}{2p}, k\right)$. Les coordonnées des points d'intersection qui se trouvent sur la sécante EF : $ky + p(x + p - \alpha) = 0$, sont :

$$x = -p + \frac{3k^2}{2p} \pm \frac{k}{p}\sqrt{2(k^2 - p^2)},$$

$$y = -k \mp \sqrt{2(k^2 - p^2)}.$$

Si on a $k^2 - 2p(p - \alpha) = 0$, les coordonnées des points communs au cercle C' et à la parabole P, qui se trouvent sur la sécante AB : $ky - p(x + \alpha) = 0$, sont :

$$x = -p + \frac{3k^2}{2p} \pm \frac{k}{p}\sqrt{2(k^2 - p^2)},$$

$$y = k \pm 2\sqrt{k^2 - p^2}.$$

Digitized by Google

Les coordonnées des points communs, qui se trouvent sur la sécante EF : $ky + p(x + p - \alpha) = 0$, sont :

$$x = p - \alpha = \frac{k^2}{2p} \quad , \quad y = -k.$$

Ces coordonnées sont celles du point E avec lequel s'est confondu le point F, et qui est devenu un point de tangence du cercle C' et de la parabole P.

Les deux paraboles $y^2 - 2px = 0$ et $y^2 - 2p(p - x) = 0$ se coupent en deux points R et R' situés sur une perpendiculaire à l'axe de la parabole P passant par le foyer de cette parabole.

Si le diamètre $\beta - k = 0$ est choisi de telle sorte qu'il passe par un de ces points R ou R', le cercle C' a son centre sur l'axe de la parabole P au point $\left(\frac{3p}{2}, 0\right)$ et est tangent à la parabole P simultanément aux deux points R et R', symétriques par rapport à l'axe.

7° Si on a $\alpha - k = 0$, on cherche d'abord le lieu décrit par le point $M(x_1, y_1)$. Pour cela, on remplace α par k dans les deux formules de Desboves, et on élimine ensuite β entre les deux équations ainsi obtenues :

$$x_1 = \frac{2\beta^2 - kp + p^2}{p} \quad , \quad y_1 = -\frac{2k\beta}{p},$$

d'où $$\beta^2 = \frac{p^2 y_1^2}{4k^2} \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{p y_1^2}{2k^2} - k + p.$$

Par conséquent, on aura :

$$y_1^2 - \frac{2k^2}{p}(x_1 + k - p) = 0.$$

Digitized by Google

On remplace maintenant x_1 et y_1 par leur valeur exprimée en fonction de x et de y, au moyen des formules (d) et (e), et on obtient finalement :

$$(2x + k)\,[k^2 y^2 - 2px^2\,(2x - k)] = 0.$$

Si on fait $k = p$ dans cette dernière équation, le premier facteur égalé à 0 représentera la directrice de la parabole P, et le deuxième le lieu Σ.

Pour trouver le lieu des pôles doubles communs au cercle C' et à la parabole P, on prend les équations du centre et de la polaire de l'origine de la courbe représentée par l'équation (S'), en remplaçant partout α par k :

$$2x - \left[\frac{2\beta^2 - p^2}{p} + 2p\,(1 + \lambda)\right] = 0,$$

$$2y\,(1 + \lambda) - \frac{\beta}{p}\,(p - 2k) = 0,$$

$$-\left[\frac{2\beta^2 - p^2}{p} + 2p\,(1 + \lambda)\right] x - \frac{\beta}{p}\,(p - 2k)\,y + 2k\,(p - k) = 0.$$

De ces trois équations nous tirons :

$$-2x^2 - \frac{\beta}{p}\,(p - 2k)\,y + 2k\,(p - k) = 0,$$

$$2p\,(1 + \lambda) = 2x + p - \frac{2\beta^2}{p},$$

$$(2x + p)\,y = \frac{2^2\,\beta y}{p} + (p - 2k)\,\beta\,;$$

mais on a :

$$\frac{p}{y}\,(2kp - 2k^2 - 2x^2) = (p - 2k)\,\beta,$$

Digitized by Google

donc $$\beta^2 = \frac{p}{2y^2}[(2x+p)y^2 + 2p(x^2+k^2-kp)];$$

d'autre part on a :

$$\beta^2 = \frac{4p^2}{y^2}\frac{(x^2+k^2-kp)^2}{(p-2k)^2}.$$

En égalant ces deux valeurs de β^2, on obtient l'équation du lieu :

$$(p-2k)^2(2x+p)y^2 - 2p(x^2+k^2-kp)(4x^2-p^2) = 0$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$(2x+p)[(p-2k)^2y^2 - 2p(2x-p)(x^2+k^2-kp)] = 0,$$

Pour $k=p$, on retrouve l'équation de la directrice de la parabole P et l'équation du lieu Σ.

Pour $k=0$, l'équation :

$$(p-2k)^2y^2 - 2p(x^2-kp+k^2)(2x-p) = 0$$

se réduit également à celle de la courbe Σ. Donc, quand le point $N(\alpha, \beta)$ décrit la tangente au sommet de la parabole P, le lieu des pôles doubles communs à cette parabole et au cercle C' se compose de la directrice de la parabole P et de la courbe Σ. On a ainsi un troisième mode de génération de la courbe Σ entièrement différent de ceux indiqués dans les problèmes 3 et 11.

THÉORÈME. — Supposons que le point $N(\alpha, \beta)$ décrive la courbe $f(\alpha, \beta) = 0$, que $\gamma = 0$ soit l'équation du lieu géométrique décrit en ce cas par le centre du cercle C, que $\gamma' = 0$ soit celle du lieu

Digitized by Google

décrit dans le même cas par le centre du cercle C'. Ces deux courbes $\gamma = 0$, $\gamma' = 0$ auront des points d'intersection situés sur la courbe $\gamma'' = 0$ décrite par le centre du cercle C, quand le point N, au lieu de se mouvoir sur la courbe $f(\alpha, \beta) = 0$, décrira la droite $\alpha - p = 0$.

Le nombre de ces points d'intersection de $\gamma = 0$ et de $\gamma' = 0$ situés sur $\gamma'' = 0$ sera égal à n fois celui des racines de l'équation $f(p, \beta) = 0$, résolue par rapport à β et obtenue en remplaçant α par p dans $f(\alpha, \beta) = 0$, si n indique le nombre des points de $\gamma'' = 0$ qui correspondent à chaque position du point N sur la courbe $f(\alpha, \beta) = 0$.

Ce théorème s'applique non seulement aux points d'intersection des lieux décrits par les centres des cercles C et C', mais aux points d'intersection de tous les lieux géométriques relatifs aux cercles C et C' et au point N, ces lieux géométriques étant obtenus en remplaçant, dans l'énoncé précédent, les centres considérés par d'autres points liés à ces cercles C et C', ainsi qu'on le démontrera par divers exemples.

Remarque. — Si, au lieu du point $N(\alpha, \beta)$ décrivant la droite $\alpha - p = 0$, on considérait le point $M(x_1, y_1)$ décrivant la parabole $y_1^2 - 2px_1 = 0$, on arriverait au même théorème.

La démonstration de cette propriété de la courbe $\gamma'' = 0$ s'appuie sur ce que, à chaque position du point N, soit N_1, située à l'intersection de la droite $\alpha - p = 0$ et de la courbe $f(\alpha, \beta) = 0$, correspondent autant de points communs aux deux lieux $\gamma = 0$ et

Digitized by Google

$\gamma' = 0$ que chacun de ces lieux a de points engendrés par cette position N_1 du point N. Ces points engendrés sont communs parce que N_1 étant situé sur $\alpha - p = 0$, pour cette position N_1 les deux cercles C et C' se confondent, et les n, points des lieux $\gamma = 0$ et $\gamma' = 0$ correspondants à N_1, se confondront également et seront situés sur $\gamma'' = 0$, puisque N_1 est sur la droite $\alpha - p = 0$. De même pour chaque autre point N_2, N_3, situé à l'intersection de la droite $\alpha - p = 0$ et de la courbe $f(\alpha, \beta) = 0$, il y a égalelement n points communs à $\gamma = 0$ et $\gamma' = 0$ situés sur $\gamma'' = 0$.

Des exemples feront comprendre la généralité de ce théorème, On examinera successivement diverses courbes $f(\alpha, \beta) = 0$, décrites par le point N, et divers points liés aux cercles C et C', au lieu de considérer uniquement les centres qui ont seuls figuré dans l'énoncé. Ces exemples sont les suivants :

1er Exemple. — *Pôles doubles.* — Le point $N(\alpha, \beta)$ décrit le diamètre $\beta - k = 0$ de la parabole P. On a trouvé dans ce cas, pour le lieu de deux des pôles doubles communs au cercle C et à la parabole P, l'hyperbole équilatère :

$$(\gamma) \quad pxy - k(ky - px) = 0$$

et pour le lieu de deux des pôles doubles communs au cercle C' et à la parabole P, la courbe représentée par l'équation :

$$(\gamma') \quad (2px + p^2 - 2k^2)\, y^2 + pk^2(2x - p) = 0.$$

Cherchons successivement les points d'intersection de chacun de ces deux lieux avec le lieu Σ décrit par ces deux mêmes pôles doubles quand le point

Digitized by Google

$N(\alpha, \beta)$ se meut sur la droite $\alpha - p = 0$; et cherchons également les points d'intersection des deux courbes (γ) et (γ'). Le lieu Σ est celui qui, dans le théorème, est représenté par l'équation $\gamma'' = 0$. Les abscisses des points communs aux deux courbes (γ) et (Σ) seront données par l'équation :

$$(2px^2 - 2k^2x + pk^2)(2px - p^2 - 2k^2)x^2 = 0,$$

les abscisses des points communs aux deux courbes (γ') et (Σ) par l'équation :

$$(2px^2 - 2k^2x + pk^2)(2x - p)(2x + p) = 0,$$

et des points communs aux deux courbes (γ) et (γ') par l'équation :

$$(2px^2 - 2k^2x + pk^2)(2px - k^2) = 0.$$

Donc les trois courbes (γ), (γ'), (Σ) passeront toutes trois par deux points dont les abscisses seront données par l'équation : $2px^2 - 2k^2x + pk^2 = 0$, et les ordonnées correspondantes à ces abscisses par l'équation :

$$y = \frac{kpx}{k^2 - px}.$$

Ces deux points sont des pôles doubles communs à la parabole P et aux deux cercles C et C' confondus en un seul cercle pour $\alpha = p$.

Quand on a $\alpha = p$ et $\beta = k$, les expressions obtenues précédemment :

$$x_1 = \frac{4x^2}{2x - p} \qquad \text{et} \qquad y_1 = -\frac{4x^2}{y}$$

donnent immédiatement les coordonnées des points (x, y) de la courbe Σ communs aux trois courbes (γ), (γ') et (Σ), en exprimant x_1 et y_1 en fonction de p et de k.

Digitized by Google

Donc aux propriétés déjà trouvées de la courbe Σ s'ajoute la suivante : Quand le point $N(\alpha, \beta)$ décrit un lieu quelconque $f(\alpha, \beta)=0$, le lieu de deux des pôles doubles communs au cercle C et à la parabole P, et le lieu de deux des pôles doubles communs au cercle C' et à la parabole P, auront des points d'intersection sur la courbe Σ. Le nombre de ces points d'intersection est double de celui des racines de l'équation $f(p, \beta)=0$.

2me Exemple. — *Centres.* — $f(\alpha, \beta)=\beta^2-2q\alpha=0$. — Considérons la figure formée par les cercles C, C', la parabole P et le point $N(\alpha, \beta)$.

Lorsque le point N se meut sur la perpendiculaire $\alpha-p=0$ à l'axe de la parabole P, les deux cercles C et C' se confondent, et leur centre décrit la parabole (γ'') :

$$(\gamma'')\quad 8\eta^2-p(2\alpha-p)=0.$$

Si le point $N(\alpha, \beta)$ se mouvait sur une courbe quelconque donnée : $f(\alpha, \beta)=0$, le centre du cercle C décrirait un lieu géométrique $\gamma=0$, et le centre du cercle C' un autre lieu $\gamma'=0$. Les deux lieux $\gamma=0$ et $\gamma'=0$ auront autant de points d'intersection réels situés sur la parabole (γ'') que la droite $\alpha-p=0$ a de points de rencontre avec la courbe $f(\alpha, \beta)=0$, parce que chaque position du point N sur la droite $\alpha-p=0$ ne donne qu'un seul point du lieu (γ'').

Supposons $f(\alpha, \beta)=\beta^2-2q\alpha=0$. La droite $\alpha-p=0$ coupe cette parabole en deux points $(p, \pm\sqrt{2qp})$. L'équation $\beta^2-2qp=0$ est du second degré en β ; à chaque position du point N sur la droite $\alpha-p=0$ correspond un centre unique situé sur $\gamma''=0$; ainsi

Digitized by Google

on a $n=1$. Le nombre des points d'intersection des deux courbes $\gamma=0$, $\gamma'=0$ situés sur $\gamma''=0$ est donc égal à 2. Nous aurons :

$$\gamma'' = 8y^2 - p(2x-p) = 0,$$
$$\gamma = (4q-p)^3 y^2 - 4qp(x-p)^3 = 0,$$
$$\gamma' = 32q^2y^2 - p(2x-p)(2x-p-2q)^2 = 0.$$

En cherchant les points d'intersection de $\gamma''=0$ et de $\gamma=0$, ensuite de $\gamma''=0$ et de $\gamma'=0$, on voit que la parabole $\gamma''=0$ coupe chacune des deux courbes $\gamma=0$ et $\gamma'=0$ en deux mêmes points :

$$\left(\frac{p+q}{2} \quad , \quad \pm\sqrt{\frac{pq}{2}}\right).$$

Les deux courbes $\gamma=0$ et $\gamma'=0$ se coupent donc en ces deux points réels et symétriques par rapport à l'axe de la parabole P.

Si le point $N(x, \zeta)$ décrit la parabole :

$$P'(4\zeta^2 + px = 0),$$

c'est-à-dire si on a $q=-\frac{p}{8}$, on aura les trois équations suivantes :

$$\gamma = 27py^2 - 4(x-p)^3 = 0,$$
$$\gamma' = 8py^2 - (2x-p)(2x-3p)^2 = 0,$$
$$\gamma'' = 8y^2 - p(2x-p) = 0.$$

Les deux courbes $\gamma=0$ et $\gamma'=0$ ne se coupent pas ; leurs points d'intersection :

$$\left(\frac{p}{4} \quad , \quad \pm\frac{p}{4}\sqrt{-1}\right)$$

Digitized by Google

situés sur la parabole $\gamma'' = 0$ sont imaginaires conjugués, puisque la droite $\alpha - p = 0$ coupe la parabole P' en deux points imaginaires conjugués.

Si la parabole $\beta^2 - 2q\alpha = 0$ se confond avec la parabole P elle-même, c'est-à-dire si on a $q = p$, il viendra ;

$$\gamma = 27py^2 - 4(x-p)^3 = 0,$$
$$\gamma' = 32py^2 - (2x-p)(2x-3p)^2 = 0,$$
$$\gamma'' = 8y^2 - p(2x-p) = 0,$$

et les coordonnées des deux points d'intersection seront :

$$\left(\frac{5p}{2}, \frac{p\sqrt{2}}{2}\right).$$

La considération de la courbe $\gamma'' = 0$ est fort utile pour la recherche des points d'intersection des deux courbes $\gamma = 0$ et $\gamma' = 0$; car la recherche directe de ces points d'intersection présente quelquefois de réelles difficultés. Dans le cas où on a $\beta^2 - 2p\alpha = 0$, on arrive facilement à trouver directement les abcisses des points d'intersection des deux courbes $\gamma = 0$ et $\gamma' = 0$, et à décomposer comme il suit l'équation du 3e degré qui donne ces abcisses.

$$88x^3 - 372px^2 + 426p^2x - 115p^3 = 0,$$
$$(2x-5p)(44x^2 - 76px + 23p^2) = 0.$$

Mais supposons qu'on ait $\beta^2 - 2q\alpha = 0$. En cherchant directement les abcisses des points d'intersec-

Digitized by Google

tion des deux courbes $\gamma = 0$ et $\gamma' = 0$, on aurait à résoudre l'équation :

$$8[(4q-p)^3 - 16q^3]x^3 - 4[(4q-p)^3(3p+4q) - 96pq^3]x^2 + 2[(4q-p)^3(p+2q)(3p+2q) - 192p^2q^3]x - p[(4q-p)^3(p+2q)^2 - 128p^2q^3] = 0.$$

Il faudrait remarquer que le premier membre de cette équation contient en facteur : $2x - 4q - p$, et écrire ensuite le quotient de la division de ce premier membre par $2x - 4q - p$. La longueur de ce calcul direct montre l'avantage de la méthode indirecte, qui consiste à chercher les points communs aux deux courbes $\gamma = 0$ et $\gamma' = 0$ au moyen de la courbe auxiliaire $\gamma'' = 0$ passant par ces points communs.

Dans la recherche des points d'intersection de deux coniques, on a recours à une courbe auxiliaire ; et, en ce cas, la méthode consiste à déterminer les couples de sécantes communes qui passent par les points communs aux deux coniques. Mais, en général, pour les courbes d'un degré supérieur au second, la difficulté est de trouver les courbes auxiliaires contenant les points communs et ayant des équations plus simples que celles des courbes dont on cherche les points d'intersection. Ainsi, dans le problème 15, on a trouvé par une déduction directe, que la parabole auxiliaire P' passait par deux des points communs aux courbes μ et μ'. Dans les derniers problèmes, c'est un théorème, reposant sur la coïncidence des cercles C et C' pour $\alpha = p$, qui a servi à déterminer la courbe auxiliaire $\gamma'' = 0$ sur laquelle

Digitized by Google

se trouvent des points d'intersection des lieux géométriques relatifs à ces deux cercles.

En vertu de ce théorème, le rôle de la parabole (γ'') relativement aux lieux des centres C et C' est le même que le rôle de la courbe Σ relativement aux lieux des pôles doubles communs à la parabole P et au cercle C, et des pôles doubles communs à la parabole P et au cercle C'.

3e Exemple. — *Points invariablement liés aux cercles mobiles* C *et* C'. — Comme dans le premier exemple, le point N décrit le diamètre $\beta - k = 0$ de la parabole P. Aux différentes positions du point N sur ce diamètre, correspondent différents cercles C et C'. On demande : 1° l'équation $\gamma = 0$ du lieu décrit par les deux points du cercle C qui se trouvent à l'intersection de ce cercle et du diamètre de la parabole P qui passe par le centre de ce cercle ; 2° l'équation $\gamma' = 0$ du lieu décrit par les deux points du cercle C' qui se trouvent à l'intersection de ce cercle et du diamètre de la parabole P qui passe par le centre de ce cercle ; 3° l'équation $\gamma'' = 0$ du lieu décrit par les deux points du cercle C' (confondu avec le cercle C) qui se trouvent à l'intersection de ce cercle et du diamètre de la parabole P qui passe par le centre de ce cercle, quand le point N décrit la droite $\alpha - p = 0$; 4° on vérifiera que les deux lieux $\gamma = 0$ et $\gamma' = 0$ ont deux points d'intersection situés sur le lieu $\gamma'' = 0$. On calculera les coordonnées de ces deux points.

Digitized by Google

En opérant comme précédemment, on trouvera les équations demandées :

$$\gamma = kp(x^2 - y^2) - 2[p^2 y + k(k^2 + p^2)]x = 0,$$
$$\gamma' = pk^2 x^2 - p(3k^2 + 4p^2)y^2 - pk[k^2 + 2p^2]y - k^2(2k^2 + p^2)x = 0,$$
$$\gamma'' = (8x + p)y^2 - px(x - p) = 0.$$

Les deux suivantes donnent les abcisses et les ordonnées des deux points communs aux courbes $\gamma = 0$, $\gamma' = 0$ qui se trouvent sur la courbe $\gamma'' = 0$:

$$4px^2 - 4(2k^2 + p^2)x - pk^2 = 0,$$
$$2y + k = 0.$$

PROBLÈME 20. — On sait que les points d'incidence des normales menées d'un point $M(x_1, y_1)$ à la parabole P se trouvent sur une hyperbole équilatère H (l'hyperbole d'Apollonius). Soient x et y les coordonnées du centre d'un des couples de sécantes communes à l'hyperbole équilatère H et à la parabole P, c'est-à-dire les coordonnées d'un pôle double commun à ces deux courbes. On demande d'exprimer les coordonnées x_1, y_1 du point M en fonction de x et de y.

On a donné plus haut les formules qui expriment les coordonnées x_1 et y_1 du point M en fonction des coordonnées x, y des pôles doubles communs à la parabole donnée et au cercle C.

Si au lieu de C, on considère l'hyperbole équilatère H, on trouve par la même méthode les formules qui expriment les coordonnées x_1, y_1 du point M

Digitized by Google

en fonction des coordonnées x et y des pôles doubles communs à la parabole donnée et à cette hyperbole H.

Ces nouvelles formules sont :

$$(\delta)\ x_1 = p + \frac{y^2 + px}{p}, \quad (\varepsilon)\ y_1 = -\frac{y}{2p^2}(y^2 + 2px).$$

PROBLÈME 20bis. — Le problème précédent peut s'énoncer de la manière suivante : Le point M occupant dans le plan une position dont les coordonnées x_1, y_1 sont données, on demande : 1° le lieu (δ) des centres de toutes les coniques (hyperboles) qui passent par les points communs à la parabole P et à l'hyperbole (H) ; 2° l'équation d'une autre courbe (ε) dont les points d'intersection avec le lieu des centres (δ) soient les pôles doubles communs à la parabole P et à l'hyperbole H pour la position donnée du point M.

Le lieu des centres des coniques qui passent par les points d'intersection de la parabole donnée P et de l'hyperbole H sur laquelle se trouvent les points d'incidence des normales menées du point $M(x_1, y_1)$ donné est la parabole :

$$(\delta)\ y^2 + p(x + p - x_1) = 0.$$

Les coniques qui passent par les points communs à la parabole P et à l'hyperbole H sont des hyperboles ; elles ont des points à l'infini, puisqu'elles passent par le point d'intersection à l'infini de la parabole P et de l'hyperbole H. — Comme variété des hyperboles qui passent par les points d'intersection des courbes P et H, l'équation générale de

Digitized by Google

ces hyperboles comprend trois systèmes de sécantes communes à P et à H. Les centres de ces trois systèmes, c'est-à-dire les trois pôles doubles communs à la parabole P et à l'hyperbole H s'obtiendront par la résolution des deux équations simultanées :

$$(\delta)\ y^2 + p(x + p - x_1) = 0 \quad , \quad (\varepsilon)\ y^3 + 2pxy + 2p^2 y_1 = 0.$$

Ces trois pôles doubles se trouvent à l'intersection de la parabole (δ) (lieu des centres de toutes les courbes représentées par l'équation générale des courbes passant par les points communs à P et à H) et d'un lieu (ε) du 3e degré.

Les équations (δ) et (ε) sont précisément celles qui donnent les valeure de x_1 et de y_1 en fonction de x et de y.

Remarque. — Par les points communs aux deux courbes (δ) (ε) on peut faire passer une hyperbole équilatère, dont on obtient l'équation en portant dans l'équation (ε) la valeur de $y^2 + px$ tirée de l'équation (δ). L'équation de cette hyperbole équilatère est :

$$(\varepsilon')\ xy + (x_1 - p)y + 2py_1 = 0\,;$$

de telle sorte que pour trouver x et y, il suffira de résoudre les équations simultanées (δ) (ε') au lieu de (δ) et (ε).

Si, en résolvant ces équations simultanées, on élimine x, on remarque que l'équation du 3e degré ainsi obtenue :

$$y^3 + 2p(p - x_1)y - 2p^2 y_1 = 0$$

est la transformée en $-y$ de l'équation qui donne les ordonnées des pieds des normales qu'on mène

Digitized by Google

d'un point $M(x_1, y_1)$ à la parabole P. La condition de réalité et la condition d'égalité des racines sont donc les mêmes pour ces deux équations.

PROBLÈME 21. — Le point $M(x_1, y_1)$ décrivant une droite quelconque, quelle sera l'équation du lieu décrit par les pôles doubles communs à la parabole P et à l'hyperbole H? Examiner le cas où l'équation de ce lieu se dédouble ou se simplifie.

Quand le point $M(x_1, y_1)$ décrit la droite :

$$Ax_1 + By_1 + C = 0$$

on remplace x_1 et y_1 dans cette dernière équation par leur valeur en fonction de x et de y, coordonnées des pôles doubles, et on obtient ainsi l'équation du lieu cherché :

$$(1) \quad By^3 - 2Apy^2 - 2p^2(C + Ap) + 2p(By - Ap)x = 0.$$

La condition pour que le premier membre de l'équation de cette courbe renferme en facteur le premier membre de l'équation de la droite $By - Ap = 0$ est :

$$(2) \quad 2C = -Ap\left(\frac{A^2 + 2B^2}{B^2}\right).$$

Or cette condition exprime que la droite :

$$Ax_1 + By_1 + C = 0$$

est normale à la parabole P, en un point G dont les coordonnées sont : $\frac{pA^2}{2B^2}$ et $\frac{pA}{B}$.

Digitized by Google

Posant $\frac{pA}{B} = -2k$, et cherchant l'équation de la normale à la parabole au point $\left(\frac{2k^2}{p}, -2k\right)$ qui n'est autre que le point G, on voit que l'équation de cette normale est :

$$y_1 = \frac{2k}{p}\left(x_1 - p - \frac{2k^2}{p}\right)$$

et qu'elle est identique à l'équation $Ax_1 + By_1 + C = 0$, si on a :

$$2C = -Ap\left(\frac{A^2 + 2B^2}{B^2}\right).$$

[On le constate immédiatement, en remarquant que, si on tient compte de la relation $\frac{pA}{B} = -2k$, la relation (2) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{-C}{B} = -2k\left(1 + \frac{2k^2}{p^2}\right)\Big].$$

Cette condition étant satisfaite, la droite :

$$Ax + By + C = 0$$

est normale à la parabole P au point $\left(\frac{2k^2}{p}, -2k\right)$, puisqu'elle a même coefficient angulaire $-\frac{A}{B} = \frac{2k}{p}$ et même ordonnée à l'origine $-\frac{C}{B} = -2k\left(1 + \frac{2k^2}{p^2}\right)$ que la normale en ce point.

Après avoir remplacé $\frac{C}{B}$ par la valeur précédemment trouvée, on pourra mettre l'équation (1) indifféremment sous une des deux formes :

Digitized by Google

$$\left(y-\frac{Ap}{B}\right)\left[y^2-\frac{Ap}{B}y+2px+2p\frac{(Ap+C)}{A}\right]=0$$

ou bien $(y+2k)(y^2+2px+2ky-4k^2)=0.$

Telle est l'équation du lieu des pôles doubles dans le cas où le point $N(\alpha, \beta)$ décrit le diamètre $\beta-k=0$ et où le point $M(x_1, y_1)$ décrit la normale en G à la parabole P.

Si on a $A=0$, l'équation $By_1+C=0$ de la droite décrite par le point $M(x_1, y_1)$ représente un diamètre de la parabole P. L'équation du lieu des pôles doubles communs à l'hyperbole H et à la parabole P devient alors :

$$By^3+2pBxy-2p^2C=0.$$

Si on a $B=0$, l'équation $Ax_1+C=0$ de la droite décrite par le point M représente une perpendiculaire à l'axe. Le lieu des pôles doubles devient une parabole ayant même axe que la parabole P. L'équation de ce lieu est :

$$Ay^2+p[Ax+Ap+C]=0.$$

Le sommet de cette dernière parabole sera à l'origine quand avec $B=0$, on aura $Ap+C=0$.

Si on se reporte aux formules qui expriment x_1 et y_1 en fonction de x et de y, on remarque que l'équation :

$$(\varepsilon) \quad y_1=-\frac{y}{2p^2}(y^2+2px)$$

donne immédiatement le lieu géométrique corres-

Digitized by Google

pondant au cas $By_1 + C = 0$ avec $A = 0$, et que l'équation :

$$(\delta) \quad x_1 = p + \frac{y^2 + px}{p}$$

donne le lieu géométrique correspondant au cas $Ax_1 + C = 0$ avec $B = 0$. Il suffit, dans le premier cas, de remplacer y_1 par $-\frac{C}{B}$, et, dans le second cas, de remplacer x_1 par $-\frac{C}{A}$ dans les formules (δ) (ε).

PROBLÈME 22. — Des trois points d'incidence des normales menées d'un point $M(x_1, y_1)$ à la parabole P, deux sont situés sur la polaire AB du point $N(\alpha, \beta)$ relativement à cette parabole. Le troisième est à l'intersection de la parabole et d'une parallèle à l'axe représentée par l'équation $y + 2\beta = 0$. La polaire AB du point N et la parallèle $y + 2\beta = 0$ à l'axe, forment un couples de sécantes communes à la parabole P et à l'hyperbole H. — Si le point $N(\alpha, \beta)$ décrit une parallèle $\beta - k = 0$ à l'axe de la parabole, l'équation du lieu géométrique des pôles doubles, communs à la parabole P et à l'hyperbole H, se dédoublera en celle d'une parallèle $y + 2k = 0$ à l'axe qui est le lieu d'un des pôles doubles, et en celle de la parabole $y^2 + 2px + 2ky - 4k^2 = 0$, qui est le lieu décrit par les deux autres pôles doubles.

La solution de ce problème découle immédiatement d'un des cas particuliers du problème précédent, du cas où le point $M(x_1, y_1)$ décrit une normale à la parabole P.

Digitized by Google

En effet, le point $N(\alpha, \beta)$ décrit le diamètre donné : $\beta - k = 0$. Au moyen des formules de Desboves, de l'équation du lieu décrit par le point N on déduit celle du lieu décrit par le point $M(x_1, y_1)$, qui est :

$$y_1 = \frac{2k}{p}\left[x_1 - p - \frac{2k^2}{p}\right].$$

Remplaçant x_1 et y_1 par leur valeur déduite des formules (δ) (ε), on trouve l'équation suivante du lieu décrit par les trois pôles doubles communs à l'hyperbole H et à la parabole P :

$$y^3 + 4ky^2 + 2p(y + 2k)x - 8k^3$$
$$= (y + 2k)[y^2 + 2px + 2ky - 4k^2] = 0.$$

C'est le résultat qu'on a obtenu dans le problème précédent. En effet, si on considère la polaire AB du point $N(\alpha, \beta)$ passant par deux points d'incidence A et B des normales menées du point M à la parabole comme la première droite d'un couple de sécantes communes à la parabole P et à l'hyperbole H qui passe par les trois points d'incidence de ces normales, on trouve que la deuxième droite de ce couple, celle qui passe par le point G, troisième point d'incidence, est donnée par l'équation $y + 2\beta = 0$, qui devient $y + 2k = 0$. Le pôle double qui se trouve à l'intersection des deux droites de ce couple étant toujours situé sur la droite $y + 2k = 0$, cette droite est le lieu géométrique de ce pôle double.

On peut vérifier que le lieu géométrique des pôles doubles, composé de la parallèle à l'axe et d'une parabole, passe par les points communs aux deux courbes (δ) et (ε'), lesquelles, par leur intersection, donnent les trois pôles doubles qui correspondent à une po-

Digitized by Google

sition déterminée du point $M(x_1, y_1)$ sur la normale décrite par ce point.

PROBLÈME 23. — Lorsque le point M se meut sur la parabole P elle-même, démontrer que le lieu des pôles doubles communs à cette parabole et à l'hyperbole H se compose d'une parabole et d'une courbe de 4e degré.

Si le point $M(x_1, y_1)$ se meut sur la parabole P, on a $y_1^2 - 2px_1 = 0$. Il suffit de remplacer dans cette dernière équation x_1 et y_1 par leur valeur tirée des formules (δ) (ε), pour obtenir l'équation du lieu décrit par les pôles doubles (x, y) communs à la parabole P et à l'hyperbole H. L'équation de ce lieu est :

$$y^6 + 4pxy^4 + 4p^2(x^2 - 2p^2)y^2 - 8p^5(x + p) = 0.$$

Le premier membre de cette équation se décompose comme il suit :

$$(y^2 + 2px + 2p^2)[y^4 + 2p(x - p)y^2 - 4p^4] = 0.$$

Le premier facteur égalé à 0 représente une parabole de même paramètre et de même axe que la parabole P. Elle a son sommet au point $(-p, 0)$ et a ses branches dirigées vers la partie négative de l'axe des x. Le second facteur égalé à 0 représente une courbe du 4e degré à branches infinies, asymptote à l'axe des x et symétrique par rapport à cet axe. En résolvant son équation par rapport à y^2, il faut rejeter une des valeurs de y^2, celle qui contient un radical affecté du signe —, parce qu'elle donne-

Digitized by Google

rait des valeurs négatives pour y^2 et des valeurs imaginaires pour y.

PROBLÈME 24. — Quand le point donné $M(x_1, y_1)$ occupe sur la parabole P une position déterminée par ses coordonnées x_1 et y_1, indiquer séparément quels sont les pôles doubles communs à la parabole P et à l'hyperbole H, situés sur la parabole :

$$(\theta)\quad y^2 + 2px + 2p^2 = 0$$

et ceux qui sont situés sur la courbe :

$$(\theta')\quad y^4 + 2p(x-p)y^2 - 4p^4 = 0.$$

Trouver les coordonnées de chacun de ces pôles doubles.

Les pôles doubles communs à l'hyperbole H et à la parabole P, quand le point M décrit cette parabole P, se trouvent sur l'une ou l'autre des deux courbes (θ), (θ').

Quand le point M occupe sur la parabole P une position déterminée par ses coordonnées x_1 et y_1, les pôles doubles correspondants à cette position du point M se trouveront à l'intersection des deux courbes (δ) (ε').

$$(\delta)\quad y^2 + p(x + p - x_1) = 0,$$
$$(\varepsilon')\quad xy + (x_1 - p)y + 2py_1 = 0.$$

Les abcisses des points d'intersection s'obtiennent en éliminant y entre les équations (δ) (ε'), et sont données par l'équation :

$$x^3 + (x_1 - p)x^2 - (x_1 - p)^2 x - (x_1 - p)^3 + 8p^2 x_1 = (x + x_1 + p)[(x-p)^2 - x_1(x_1 - 4p)] = 0.$$

Digitized by Google

Cette équation donne tout à la fois les abscisses des pôles doubles qui se trouvent sur (θ) et de ceux qui se trouvent sur (θ').

Pour séparer ces pôles doubles et pour déterminer celui qui se trouve sur (θ), on cherche les abscisses des points d'intersection des courbes (θ) (δ). Par l'élimination de y^2 entre les équations de ces deux courbes, on trouve l'abscisse cherchée $x = -(x_1 + p)$. L'équation (ε') donne l'ordonnée $y = y_1$ correspondante à cette abscisse. On obtient ainsi les coordonnées du pôle double qui se trouve sur la parabole (θ). Ce pôle double est le point de rencontre de la sécante (AB) $\beta y - p(x + \alpha) = 0$ et du diamètre $y + 2\beta = 0$ qui forment un couple de sécantes communes à la parabole P et à l'hyperbole (H). Si on substitue les coordonnées de ce pôle double dans les équations de ces deux sécantes, on tombe sur la relation $\alpha - p = 0$ qui est satisfaite dans l'hypothèse actuelle. Du reste, si on cherchait le lieu géométrique de l'intersection des deux sécantes $\beta y - p(x+p) = 0$ et $y + 2\beta = 0$ en éliminant β entre ces deux dernières équations, on retomberait sur l'équation de la parabole (θ). — En opérant pour la courbe (θ') comme on a opéré pour la parabole (θ), on trouve que les abscisses des pôles doubles situés sur cette courbe (θ') sont égales à :

$$x' = p + \sqrt{x_1(x_1 - 4p)} \quad , \quad x'' = p - \sqrt{x_1(x_1 - 4p)}.$$

L'équation (ε') donnera les ordonnées correspondantes à ces deux abscisses :

$$y' = -\frac{2py_1}{x_1 + \sqrt{x_1(x_1 - 4p)}} \quad , \quad y'' = -\frac{2py_1}{x_1 - \sqrt{x_1(x_1 - 4p)}}.$$

Digitized by Google

PROBLÈME 25. — Le point $N(\alpha, \beta)$ décrit une perpendiculaire $\alpha - k = 0$ à l'axe de la parabole P. Quel sera le lieu décrit par les pôles doubles communs à cette parabole et à l'hyperbole H?

On cherche d'abord l'équation du lieu décrit par le point $M(x_1, y_1)$; au moyen des formules de Desboves, on trouve que cette équation est celle de la parabole :

$$py_1^2 - 2k^2(x_1 + k - p) = 0.$$

On remplace ensuite x_1 et y_1 par leur valeur exprimée en fonction des coordonnées d'un pôle double (x, y) au moyen des formules (δ) (ε), et on trouve l'équation du lieu demandé :

$$y^2(y^2 + 2px)^2 - 8k^2p^2[y^2 + p(x + k)]\,0.$$

Cette équation se décompose en deux autres équations :

$$y^2 + 2p(x + k) = 0 \quad , \quad y^4 + 2p(x - k)y^2 - 4k^2p^2 = 0.$$

La première, celle de la parabole, représente le lieu géométrique du pôle double qui se trouve à l'intersection des deux droites du couple : $y + 2\beta = 0$ et $\beta y - p(x + k) = 0$ (équation de la droite AB).

Les deux autres pôles doubles se trouvent sur le lieu géométrique représenté par l'équation du 4e degré.

Remarque. — Si on donnait $k = p$, le point $N(\alpha, \beta)$ décrirait la perpendiculaire $\alpha - p = 0$ à l'axe, et le point $M(x_1, y_1)$ décrirait la parabole P. On revien-

Digitized by Google

drait ainsi au problème précédent, qui n'est qu'un cas particulier du problème plus général qu'on vient d'examiner.

PROBLÈME 26. — Lorsque le point M se meut sur la développée de la parabole P, démontrer que le lieu géométrique des pôles doubles communs à cette parabole et à l'hyperbole H se compose de trois paraboles, dont deux sont confondues avec la parabole P.

En introduisant dans l'équation de la développée $27py_1^2 - 8(x_1 - p)^3 = 0$, décrite par le point M, les valeurs x_1 et y_1 tirées des formules (δ) (ε), on aura l'équation du lieu décrit par les trois pôles doubles communs à la parabole P et à l'hyperbole H. Cette équation est :

$$27y^2(y^2 + 2px)^2 - 8(y^2 + px)^3 = 0.$$

Le premier membre de cette équation peut se mettre sous la forme :

$$(y^2 - 2px)^2(5y^2 + 8px) = 0$$

indiquée par l'énoncé. Du reste, en faisant la construction nécessaire pour obtenir les pôles doubles, on verra de suite que deux pôles doubles doivent, pour chaque position du point M sur la développée, se trouver sur la parabole P.

PROBLÈME 27. — Lorsque le point M occupe sur la développée de la parabole P une position dé-

Digitized by Google

terminée par ses coordonnées x_1 et y_1, séparer pour cette position du point M les deux pôles doubles confondus, qui se trouvent sur la parabole P, de celui qui se trouve sur la parabole $5y^2+8px=0$, et chercher les coordonnées de ces pôles doubles.

Si le point $M(x_1, y_1)$ décrit la développée de la parabole P, les pôles doubles communs à la parabole P et à l'hyperbole H se trouvent sur l'une ou l'autre des deux paraboles :

$$y^2-2px=0 \quad , \quad 5y^2+8px=0.$$

Pour une position du point M déterminée par ses coordonnées x_1 et y_1, on cherchera les coordonnées des points d'intersection des deux courbes (δ) (ε'), et comme les deux paraboles $y^2-2px=0$ et $5y^2+8px=0$ doivent passser par ces points d'intersection de (δ) et de (ε'), on verra quel point se trouve sur la parabole $y^2-2px=0$, et quel point se trouve sur la parabole $5y^2+8px=0$.

Pour la valeur donnée x_1 et y_1 des coordonnées du point M, et en remplaçant y_1^2 par $\frac{8(x_1-p)^3}{27p}$, on obtient l'équation suivante, qui donne les abcisses des points d'intersection des deux courbes (δ) (ε) :

$$27x^3+28(x_1-p)x^2-27(x_1-p)^2x+5(x_1-p)^3$$
$$=(3x-x_1+p)^2(3x+5x_1-p)=0.$$

Cette équation donne à la fois les abcisses des pôles doubles qui se trouvent sur la parabole P, et de ceux qui se trouvent sur la parabole $5y^2+8px=0$. On verra que la racine double $x'=\frac{x_1-p}{3}$ est l'ab-

Digitized by Google

cisse des deux pôles doubles confondus, situés sur les deux paraboles confondues avec la parabole P, et que la racine simple $x'' = \frac{5(p - x_1)}{3}$ est l'abcisse du pôle double situé sur la parabole $5y^2 + 8px = 0$. L'équation de l'hyperbole (ε') donnera la valeur de chaque ordonnée commune aux deux courbes (δ) (ε'). Pour le point dont l'abcisse est x', on trouvera ainsi l'ordonnée $y' = \frac{3py_1}{2(p - x_1)}$; et pour le point dont l'abcisse est x'', on trouvera l'ordonnée $y'' = \frac{3py_1}{x_1 - p}$.

De la sorte, on aura les coordonnées des deux pôles doubles (x', y') confondus, qui se trouvent sur la parabole P, et celles du pôle double (x'', y'') qui se trouve sur la parabole $5y^2 + 8px = 0$.

PROBLÈME 28. — On suppose qu'un pôle double commun à l'hyperbole H et à la parabole P décrive une perpendiculaire $x - k = 0$ à l'axe des x.

1° Quel sera le lieu (T) décrit par le point $M(x_1, y_1)$?

2° Le point $M(x_1, y_1)$ décrivant ce lieu (T), un des pôles doubles (communs à l'hyperbole H et à la parabole P) décrira évidemment la perpendiculaire $x - k = 0$ à l'axe des x. Quel sera le lieu décrit par les deux autres pôles doubles?

Un des pôles doubles décrivant la droite $x - k = 0$, l'élimination de x et de y entre cette équation et les deux équations (δ) (ε), qui expriment x_1 et y_1 en fonction de x et de y, donnera l'équation du lieu décrit par le point $M(x_1, y_1)$:

$$4py_1^2 - (x_1 - p - k)(x_1 - p + k)^2 = 0.$$

Digitized by Google

Quand le point M décrira cette courbe, si on cherche l'équation du lieu décrit par les trois pôles doubles correspondants au point M, cette dernière équation renfermera dans son premier membre le facteur $x - k$, lequel, égalé à 0, représente le lieu décrit par le premier pôle double. L'autre facteur, égalé à 0, représentera le lieu décrit par les deux autres pôles doubles.

Si, dans l'équation précédente en x_1 et y_1, on remplace x_1 et y_1 par leur valeur exprimée en fonction de x et de y, on trouve l'équation :

$$y^2(y^2 + 2px)^2 - [y^2 + p(x - k)][y^2 + p(x + k)]^2 = 0$$

qui se met sous la forme :

$$(x - k)[y^4 + p(x - k)y^2 - p^2(x + k)^2] = 0.$$

En égalant séparément à 0 chacun de ces facteurs, on obtient l'équation du lieu décrit par le premier pôle double, et celle du lieu décrit par les deux autres pôles doubles.

En résolvant par rapport à y^2 l'équation du 4e degré, on trouve pour y^2 une valeur positive qui donnera pour y deux valeurs égales et de signe contraire, et une valeur négative qu'il faut rejeter, puisqu'elle donnerait des valeurs imaginaires pour y.

PROBLÈME 29. — 1° Le cercle C et l'hyperbole H (hyperbole d'Apollonius) ont, avec la parabole P, une même sécante commune AB. On demande l'équation de la deuxième sécante formant avec AB un couple de sécantes communes au cercle C et à l'hyperbole H.

Digitized by Google

Le centre de ce couple est un pôle double commun au cercle C et à l'hyperbole H. On demande le lieu décrit par ce pôle double :

a) Quand le point $N(\alpha, \beta)$ décrit un diamètre $\beta - k = 0$ de la parabole P ;

b) quand le point $N(\alpha, \beta)$ décrit une perpendiculaire $\alpha - k = 0$ à l'axe de cette parabole.

2° Mêmes questions, quand on remplace dans l'énoncé précédent le cercle C par le cercle C'.

3° Mêmes questions, quand on remplace dans les énoncés précédents le cercle C ou le cercle C' par la parabole P'' du problème 9.

1° Les deux droites :

$$\beta y - p(x + \alpha) = 0 \quad , \quad \beta y + px = 0$$

forment un couple de sécantes communes au cercle C et à la parabole P. Donc le cercle C peut être représenté par l'équation :

$$y^2 - 2px + \lambda_1 (\beta y - px - p\alpha)(\beta y + px) = 0.$$

On trouve, en identifiant cette équation avec celle du cercle C, qu'il faut prendre $\lambda_1 = -\frac{1}{p^2 + \beta^2}$.

Les deux droites $\beta y - p(x + \alpha) = 0$ et $y + 2\beta = 0$ forment un couple de sécantes communes à la parabole P et à l'hyperbole H. Donc l'hyperbole H peut être représentée par l'équation :

$$y^2 - 2px + \lambda_2 [\beta y - p(x + \alpha)][y + 2\beta] = 0$$

à condition qu'on prenne $\lambda_2 = -\frac{1}{\beta}$. On trouve cette

Digitized by Google

valeur de λ_2 en identifiant la dernière équation du second degré avec celle de l'hyperbole H.

Si on retranche membre à membre l'équation qui renferme λ_1 et celle qui renferme λ_2, on obtient l'équation d'une conique qui passe par les points communs au cercle C et à l'hyperbole H. Cette équation est :

$$\lambda_1 [\beta y - p(x+\alpha)][\beta y + px] - \lambda_2 [\beta y - p(x+\alpha)][y + 2\beta] = 0.$$

Elle peut se mettre sous la forme :

$$[\beta y - p(x+\alpha)][\lambda_1(\beta y + px) - \lambda_2(y + 2\beta)] = 0.$$

On voit ainsi qu'elle représente un couple de sécantes communes au cercle C et à l'hyperbole H, couple dont la sécante AB fait partie.

En remplaçant λ_1 et λ_2 par leur valeur, on a l'équation cherchée de la deuxième sécante commune aux deux courbes :

$$p\beta x - p^2 y - 2\beta(\beta^2 + p^2) = 0.$$

Le centre du couple des deux sécantes communes se trouvant à la fois sur les deux droites :

$$\beta y - p(x+\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad p\beta x - p^2 y - 2\beta(\beta^2 + p^2) = 0,$$

si on a $\beta - k = 0$, l'équation de la deuxième sécante étant indépendante de α, représente (pour $\beta = k$) une droite fixe qui est le lieu demandé dans la question (a):

$$kpx - p^2 y - 2k(k^2 + p^2) = 0;$$

pour $k = p$ cette équation devient $x - y - 4p = 0$.

b) Si on a $\alpha - k = 0$, les équations des deux sécantes deviennent :

$$\beta y - p(x+k) = 0 \quad , \quad \beta[2\beta^2 + p(2p - x)] + p^2 y = 0.$$

Digitized by Google

En éliminant β entre ces deux équations, on obtient l'équation du lieu demandé :

$$(1) \quad y^4 - (x - 2p)(x + k)y^2 + 2p(x + k)^3 = 0 ;$$

pour $k = p$, cette équation devient :

$$(\Omega) \quad y^4 - (x - 2p)(x + p)y^2 + 2p(x + p)^3 = 0.$$

Pour $k = -4p$, l'équation (1) se dédouble comme il suit :

$$y = \pm(x - 4p) \quad \text{et} \quad y^2 = 2p(x - 4p).$$

2° Si on remplace dans la solution précédente les équations afférentes au cercle C par celles qui se rapportent au cercle C', on aura comme précédemment :

$$y^2 - 2px + \lambda'_1 |\beta y - p(x + \alpha)| (\beta y + p(x + p - \alpha)| = 0$$
$$y^2 - 2px + \lambda'_2 |\beta y - p(x + \alpha)| |y + 2\beta| = 0,$$

et finalement :

$$|\beta y - p(x + \alpha)| \{\lambda'_1 |\beta y + p(x + p - \alpha)| - \lambda'_2 (y + 2\beta)\} = 0$$

avec $$\lambda'_1 = -\frac{1}{p^2 + \beta^2} \quad , \quad \lambda'_2 = -\frac{1}{\beta}.$$

De telle sorte que l'équation de la deuxième sécante commune au cercle C' et à l'hyperbole H sera :

$$\beta p x - p^2 y - \beta |2\beta^2 + \alpha p + p^2| = 0.$$

Cette droite est parallèle à la deuxième sécante commune à l'hyperbole H et au cercle C. (On a donné précédemment la raison de ce parallélisme.) De plus, cette droite est perpendiculaire à la sécante

Digitized by Google

OG, et coupe l'axe à une distance du sommet égale à $x_1 + 2\alpha$.

a') Si le point $N(\alpha, \beta)$ se meut sur la droite $\beta - k = 0$, on aura l'équation du lieu cherché en éliminant α entre les équations des deux sécantes communes au cercle C' et à l'hyperbole H. Ce lieu est la droite :

$$2kpx - (p^2 + k^2)\,y - k\,(2k^2 + p^2) = 0$$

dont l'équation devient pour $k = p$:

$$2x - 2y - 3p = 0.$$

Cette droite et la droite :

$$kpx - p^2 y - 2k\,(k^2 + p^2) = 0$$

du problème précédent ont leur point d'intersection :

$$x = \frac{2k^4 + 2k^2 p^2 + p^4}{p\,(k^2 - p^2)} \quad , \quad y = k\,\frac{3p^2 + 2k^2}{k^2 - p^2}$$

situé sur la courbe (Ω), en vertu de notre théorème, ainsi qu'on peut le vérifier.

b') Si on a $\alpha - k = 0$, les équations des deux sécantes deviennent :

$$\beta y - p\,(x + k) = 0 \quad , \quad 2\beta^3 + \beta p\,(p + k - x) + p^2 y = 0.$$

Le résultat de l'élimination de β entre ces deux équations est l'équation du lieu demandé :

$$(2) \quad y^4 + (x + k)\,(p + k - x)\,y^2 + 2p\,(x + k)^3 = 0$$

laquelle pour $k = p$ devient :

$$y^4 - (x + p)\,(x - 2p)\,y^2 + 2p\,(x + p)^3 = 0.$$

Digitized by Google

Cette équation a été obtenue précédemment en considérant le cercle C. L'identité des deux résultats était prévue, puisque pour $k = p$ les cercles C et C' coïncident.

Pour $k = -\frac{3p}{2}$, l'équation (2) se dédouble comme il suit :

$$y = \pm\left(x - \frac{3p}{2}\right) \quad \text{et} \quad y^2 = 2p\left(x - \frac{3p}{2}\right).$$

3° On demande : l'équation de la seconde sécante du couple de sécantes communes à la parabole P'' et à l'hyperbole H, la première sécante de ce couple étant la polaire $\beta y - px - p\alpha = 0$ du point $N(\alpha, \beta)$. On demande également l'équation du lieu géométrique décrit par le pôle double qui est le centre de ce couple, premièrement lorsque le point N décrit la droite $\beta - k = 0$; et deuxièmement lorsque ce même point décrit la droite $\alpha - k = 0$.

Un couple de sécantes communes à la parabole P et à l'hyperbole H, se composant des deux droites $\beta y - px - p\alpha = 0$ et $y + 2\beta = 0$, l'équation de cette hyperbole H peut se mettre sous la forme :

$$y^2 - 2px + \lambda(\beta y - px - p\alpha)(y + 2\beta) = 0.$$

Cette équation est identique à celle de cette hyperbole H, si on prend $\lambda = \frac{1}{\beta}$. On a donc :

$$(H) \quad y^2 - 2px - \frac{1}{\beta}(\beta y - px - p\alpha)(y + 2\beta) = 0.$$

Un couple de sécantes communes à la parabole P et à la parabole P'', se composant des deux droites

Digitized by Google

$\beta y - px - p\alpha = 0$ et $\beta y + px = 0$, l'équation de cette parabole P'' peut se mettre sous la forme :

$$y^2 - 2px + \lambda(\beta y - px - p\alpha)(\beta y + px) = 0.$$

Cette équation devient identique à celle de la parabole P'', si on prend $\lambda = -\frac{1}{\beta^2}$:

$$(P'')\quad y^2 - 2px - \frac{1}{\beta^2}(\beta y - px - p\alpha)(\beta y + px) = 0.$$

En retranchant membre à membre les équations des deux coniques H et P'' prises sous les dernières formes indiquées, on obtient une équation qui représente un couple de sécantes communes à ces deux coniques :

$$(\beta y - px - p\alpha)(px - 2\beta^2) = 0.$$

Il en résulte que la deuxième sécante commune est la perpendiculaire $px - 2\beta^2 = 0$ à l'axe de la parabole, la première étant la polaire du point N. (A, B, G étant les pieds des trois normales, cette deuxième sécante commune est celle qui passe par G.)

a'') Si le point $N(\alpha, \beta)$ décrit la droite $\beta - k = 0$, le lieu décrit par le pôle double qui se trouve à l'intersection de ces deux sécantes communes, sera représenté par l'équation : $px - 2k^2 = 0$.

b'') Si le point $N(\alpha, \beta)$ décrit la droite $\alpha - k = 0$, pour obtenir l'équation du lieu décrit par ce pôle double, il faut éliminer β entre les deux équations :

$$\beta y - px - pk = 0 \quad ; \quad px - 2\beta^2 = 0.$$

Le résultat de l'élimination est la courbe du 3e ordre représentée par l'équation :

$$y^2 - 2p\frac{(x+k)^2}{x} = 0.$$

Digitized by Google

Trois cas peuvent se présenter suivant que k est positif, nul ou négatif : si on a $k > 0$, cette courbe symétrique par rapport à l'axe des x, ayant l'axe des y pour asymptote, et ses deux branches infinies de forme parabolique (dirigées l'une au-dessus de la partie positive de l'axe des x, l'autre au-dessous) ne rencontrera pas cet axe. Le minimum de l'ordonnée de cette courbe est égal à $2\sqrt{2pk}$ et correspond à une abscisse égale à k. Si on a $k = 0$, le lieu géométrique se confond avec la parabole P. Si on a $k < 0$, la courbe se compose de deux branches paraboliques distinctes, symétriques par rapport à l'axe des x, qui ont toutes deux l'axe des y pour asymptote, et coupent l'axe des x en un point double qui a pour abcisse $-k$. Les équations des tangentes en ce point double sont :

$$y = \pm \sqrt{\frac{2p}{-k}}(x + k).$$

PROBLÈME 30. — On suppose : 1° que le point $N(\alpha, \beta)$ décrive la droite $\alpha - k = 0$, 2° que ce point décrive la droite $\beta - k = 0$.

On demande l'équation des lieux géométriques que décriront dans ces deux hypothèses les trois pôles doubles communs à l'hyperbole H et à la parabole P''.

L'équation générale des coniques qui passent par les points d'intersection de H et de P'' est :

$$\lambda x^2 + xy - \lambda(x_1 - p)x + \left(p - x_1 - \frac{\lambda y_1}{2}\right)y - py_1 = 0.$$

Digitized by Google

Les équations du centre et de la polaire de l'origine de cette courbe sont :

$$2x + y + (p - x_1)\lambda = 0,$$

$$x + p - x_1 - \frac{\lambda y_1}{2} = 0,$$

$$\lambda(p - x_1)x + \left(p - x_1 - \frac{\lambda y_1}{2}\right)y - 2py_1 = 0.$$

De ces trois équations on tire :

$$x_1 - p = 2x + \frac{y}{\lambda},$$

$$y_1 = -\frac{2x}{\lambda} - \frac{2y}{\lambda^2},$$

$$(x\lambda + y)[x\lambda^2 - 2p] = 0.$$

1° $\alpha = k$. — On sait (problème 19) que le lieu géométrique décrit par le point $M(x_1, y_1)$ quand le point $N(\alpha, \beta)$ décrit cette droite $\alpha - k = 0$, est représenté par l'équation :

$$py_1^2 - 2k^2(x_1 - p + k) = 0$$

dans laquelle il faut porter les valeurs précédemment trouvées pour y_1 et pour $x_1 - p$; on obtient ainsi :

$$(1) \quad \frac{2p}{\lambda^2}\left(x + \frac{y}{\lambda}\right)^2 = k^2\left(2x + k + \frac{y}{\lambda}\right).$$

On introduit successivement dans (1) les racines de l'équation en λ, et on obtient ainsi les équations des lieux géométriques des trois pôles doubles qui correspondent aux trois racines de l'équation en λ.

Si on porte dans (1) la racine tirée de $x\lambda + y = 0$,

Digitized by Google

on obtient : $x + k = 0$, équation du lieu décrit par un des trois pôles doubles.

On substitue ensuite dans (1) les deux autres racines de l'équation en λ tirées de $x\lambda^2 - 2p = 0$. On isolera le terme en $\frac{1}{\lambda}$; après avoir remplacé λ^2 par $\frac{2p}{x}$ on trouvera :

$$x^2\left(x + \frac{y^2}{2p}\right) - k^2(2x + k) = (k^2 - 2x^2)\frac{y}{\lambda}.$$

On élévera au carré les deux membres de cette équation, et on obtiendra l'équation :

$$[2p(x + k)(x^2 - kx - k^2) + x^2y^2]^2 - 2px(2x^2 - k^2)^2y^2 = 0$$

qui sera celle du lieu géométrique correspondant aux deux racines de l'équation $x\lambda^2 - 2p = 0$.

En effectuant les calculs, on trouvera :

$$(2) \quad x^4y^4 - 2px(2x^4 + 2k^3x + k^4)y^2 + 4p^2(x + k)^2 \times (x^2 - kx - k^2)^2 = 0.$$

En résolvant cette équation par rapport à y^2, on voit que l'équation précédente se décompose en deux autres qui donnent chacune séparément l'équation du lieu géométrique décrit par un des deux pôles doubles restants (celui qui correspond à la racine :

$$\lambda = + \sqrt{\frac{2p}{x}}$$

et celui qui correspond à la racine :

$$\lambda = - \sqrt{\frac{2p}{x}}).$$

Digitized by Google

Ces deux équations sont :

$$(3)\quad y^2 - \frac{2p(x+k)^2}{x} = 0,$$

$$(4)\quad y^2 - \frac{2p(x^2 - kx - k^2)^2}{x^3}.$$

Or, on avait déjà trouvé plus haut (problème 29) l'équation (3) :

$$y = \pm (x+k)\sqrt{\frac{2p}{x}}$$

du lieu décrit par le pôle double qui se trouve à l'intersection des deux cordes :

$$\beta y - p(x+\alpha) = 0 \qquad \text{et} \qquad px - 2\beta^2 = 0$$

communes aux deux coniques H et P''. Donc, après avoir obtenu l'équation (2), il suffit d'en diviser le premier membre par $xy^2 - 2p(x+k)^2$ pour obtenir au quotient le premier membre de l'équation (4) du lieu décrit par l'autre pôle double.

2° $\beta = k$. — On sait (problème 19) que, dans ce cas, le point $M(x_1, y_1)$ décrit la normale (à la parabole P) représentée par l'équation :

$$(5)\quad py_1 - 2k\left(x_1 - p - \frac{2k^2}{p}\right) = 0.$$

Dans cette équation, on remplace y_1 et $x_1 - p$ par leur valeur obtenue précédemment :

$$y_1 = -\frac{2x}{\lambda} - \frac{2y}{\lambda^2} \quad \text{et} \quad x_1 - p = 2x + \frac{y}{\lambda}.$$

Digitized by Google

Les trois racines de l'équation en λ sont :

$$-\frac{y}{x} \qquad \text{et} \qquad \pm\sqrt{\frac{2p}{x}}.$$

En substituant la première dans l'équation (5), on trouve l'équation $px - 2k^2 = 0$ du lieu décrit par le premier pôle double.

Après avoir remplacé λ^2 par sa valeur tirée de l'équation $x\lambda^2 - 2p = 0$, on aura :

$$\frac{xy}{2} + 2k\left(x - \frac{k^2}{p}\right) = -\frac{(px + ky)}{\lambda}.$$

Élevant au carré les deux membres de cette équation, et remplaçant encore une fois λ^2 par $\frac{2p}{x}$, on obtiendra l'équation du lieu cherché des deux pôles correspondants aux deux valeurs de λ tirées de $x\lambda^2 - 2p = 0$:

$$\left[\frac{xy}{2} + 2k\left(x - \frac{k^2}{p}\right)\right]^2 = (px + ky)^2 \frac{x}{2p}$$

ou $$px(px - 2k^2)y^2 + 4kpx(px - 2k^2)y - 2(px - 2k^2) \times (p^2x^2 - 6k^2px + 4k^4) = 0.$$

Le facteur $px - 2k^2 = 0$ donne l'équation du lieu décrit par un de ces deux pôles doubles : celui qui se trouve à l'intersection des deux sécantes communes :

$$\beta y - p(x + \alpha) = 0 \qquad \text{et} \qquad px - 2\beta^2 = 0$$

ainsi qu'on a vu en résolvant le problème 29. Il suffit donc de diviser le premier membre de l'équation du lieu décrit par ces deux pôles doubles par ce facteur $px - 2k^2$, pour obtenir le premier membre de l'équa-

Digitized by Google

tion du lieu décrit par l'autre pôle double ; on obtient ainsi :

$$px y^2 + 4kpxy - 2\left[p^2x^2 - 6k^2px + 4k^4\right] = 0$$

ou
$$y = \frac{-2kpx \pm \sqrt{2px\,(px - 2k^2)}}{px}$$

ou plus simplement :

$$y + 2k = \pm \sqrt{\frac{2p}{x}}\left(x - \frac{2k^2}{p}\right).$$

On voit que dans l'hypothèse $\beta - k = 0$ deux pôles doubles décrivent la droite $px - 2k^2 = 0$.

PROBLÈME 31. — On suppose que le point $M(x_1, y_1)$ décrive la développée de la parabole P et que, de ce point, on mène les normales à cette parabole. En conservant les notations des problèmes précédents, on appelle $N(\alpha, \beta)$ le point d'incidence de la normale double (les points A et B étant confondus dans ce cas avec N) et G le point d'incidence de la normale simple. On demande :

1° le lieu du point d'intersection de la tangente en N à la parabole P et de la normale simple ;

2° le lieu du point d'intersection de la tangente en G à la parabole P et de la normale double MN ;

3° le lieu décrit par le centre du cercle C. (On a démontré précédemment que ce lieu est la parabole cubique représentée par l'équation :

$$27py^2 - 4(x - p)^3 = 0) ;$$

4° l'équation de la droite NG. Démontrer que cette droite enveloppe la parabole $y^2 + 16px = 0$;

Digitized by Google

5° le lieu du point de rencontre de la normale double MN et de la droite OG. Démontrer que ce lieu est représenté par l'équation :

$$2y^4 - 2x(x+p)y^2 + px^3 = 0.$$

1° Si on exprime les coordonnées des points N et G en fonction des coordonnées x_1 et y_1 du point M, on trouve pour ces coordonnées les valeurs suivantes :

$$\text{coordonnées du point } N \left\{ \frac{x_1 - p}{3} \quad ; \quad \frac{3py_1}{2(p - x_1)} \right\};$$

$$\text{coordonnées du point } G \left\{ \frac{4}{3}(x_1 - p) \quad ; \quad \frac{3py_1}{x_1 - p} \right\}.$$

On écrit alors les équations de la tangente en N et de la normale MG. En tenant compte de la relation :

$$27py_1^2 - 8(x_1 - p)^3 = 0$$

on a trois équations entre lesquelles on élimine $x_1 - p$ et y_1. Ce calcul est long. On l'abrège singulièrement par la remarque suivante : le point $N(\alpha, \beta)$ est, comme dans tous les problèmes précédents, le pôle de la droite AB qui joint les pieds de deux normales ; mais dans le cas présent, ce point se trouve soit sur la parabole P, se confondant avec A et B, soit sur la parabole P'. On a donc (si N se meut sur la parabole P) $\beta^2 - 2p\alpha = 0$. Les coordonnées du point G peuvent également s'exprimer en fonction de α et de β ; on les obtient en cherchant l'intersection de la droite $\beta y + px = 0$ et de la parabole $y^2 - 2px = 0$.

Donc on aura :

Digitized by Google

coordonnées du point N $\{\alpha\ ;\ \beta\}$ ou bien $\left\{\frac{\beta^2}{2p}\ ;\ \beta\right\}$;

coordonnées du point G $\{4\alpha\ ;\ -2\beta\}$ ou bien $\left\{\frac{2\beta^2}{p}\ ;\ -2\beta\right\}$.

L'équation de la tangente en N sera :

$$\beta y - p\left(x + \frac{\beta^2}{2p}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \beta^2 - 2y\beta + 2px = 0.$$

L'équation de la normale en G sera :

$$\frac{y + 2\beta}{2\beta} = \frac{x - \frac{2\beta^2}{p}}{p} \quad \text{ou} \quad 2\beta\,[2\beta^2 + p^2 - px] + p^2 y = 0.$$

En remplaçant $2\beta^2$ par sa valeur tirée de l'équation de la tangente en N, on aura finalement :

$$8y\beta^2 + 2p\,(p - 5x)\,\beta + p^2 y = 0.$$

On a maintenant deux équations du second degré en β entre lesquelles l'élimination se fera facilement ; et par cette élimination de β, on obtient l'équation du lieu demandé :

$$32y^4 - (64x^2 - 12px - 5p^2)\,y^2 + 8px\,(5x - p)^2 = 0.$$

Si le point N, au lieu de se trouver sur la parabole P, décrivait la parabole P', on aurait des calculs aussi simples, et on arriverait au même résultat. Or on sait que si M décrit la développée, N se meut sur P ou sur P'.

2° En opérant comme précédemment, on obtiendra l'équation de la tangente en G :

$$2\beta^2 + 2y\beta + px = 0,$$

Digitized by Google

celle de la normale en N :

$$\frac{x - \frac{\zeta^2}{2p}}{p} = \frac{y - \beta}{-\beta}.$$

Après avoir remplacé, dans cette dernière équation, ζ^2 par sa valeur tirée de l'équation de la tangente en G, on obtient une deuxième équation du second degré en ζ :

$$2y\zeta^2 + p(5x - 4p)\zeta + 4p^2 y = 0.$$

En éliminant cette variable entre les deux équations du second degré en ζ, on obtient l'équation du lieu demandé :

$$16y^4 - 8[x^2 + 6px - 8p^2]y^2 + px(5x - 4p)^2 = 0.$$

En résolvant cette équation bicarrée par rapport à y, on a :

$$y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 6px - 8p^2 \pm (x - 4p)\sqrt{(x-p)(x-4p)}}.$$

3° Cette question a été résolue précédemment, comme exemple à l'appui du théorème qui fait suite au problème 19.

4° Dans la solution du problème 19, on a donné l'équation de la droite NG :

$$\alpha(y - \zeta) + \beta(x - \alpha) = 0.$$

En remplaçant α par $\frac{\zeta^2}{2p}$, on peut donner à cette équation la forme :

$$2\zeta^2 - y\zeta - 2px = 0$$

Digitized by Google

qui montre que cette droite est l'enveloppe de la parabole représentée par l'équation :

$$y^2 + 16px = 0.$$

5° En remarquant comme précédemment, que dans le cas considéré, le point $N(\alpha, \beta)$ reste toujours le pôle de la droite AB, qu'il est situé sur la parabole P elle-même et se confond avec les deux points A et B, on aura l'équation de la normale en N, issue du point M sous la forme :

$$\frac{x - \frac{\beta^2}{2p}}{p} = \frac{y - \beta}{-\beta}.$$

Comme la droite OG est représentée par l'équation $px + \beta y = 0$, il suffit d'éliminer β entre cette équation et la précédente pour obtenir l'équation du lieu demandé :

$$2y^4 - 2x(x+p)y^2 + px^3 = 0$$

ou

$$y = \pm \sqrt{\frac{x}{2}(x + p \pm \sqrt{x^2 + p^2})}.$$

THÉORÈME. — Du point $N(\alpha, \beta)$ on mène deux tangentes à la parabole. Aux points de tangence A et B, on élève les normales à cette courbe. Du point de rencontre M de ces normales, on abaisse la troisième normale à la parabole : soit G son point d'incidence. On considère le cercle C qui passe par le sommet O et par les trois pieds A, B, G. Si le pôle N de AB décrit la perpendiculaire à l'axe représentée par l'équation $\alpha - 2p = 0$, 1° le lieu géométrique du

Digitized by Google

second point d'intersection I' du cercle C et de la tangente à la parabole en G (le premier point d'intersection étant G), est une cissoïde ; 2° cette cissoïde est la podaire de la parabole par rapport au sommet de cette parabole ; 3° cette cissoïde est l'enveloppe des cercles C.

1° L'équation générale des cercles C est :

$$x^2 + y^2 - \frac{(2\xi^2 - \alpha p + 2p^2)}{p} x + \frac{\alpha\xi}{p} y = 0.$$

Si on a $\alpha - 2p = 0$, cette équation se réduit à :

$$x^2 + y^2 - \frac{2\xi^2}{p} x + 2\xi y = 0.$$

Comme les coordonnées du point G sont :

$$\left(\frac{2\xi^2}{p} , -2\xi\right)$$

on voit sous cette dernière forme de l'équation du cercle C que ce cercle a son centre au milieu O' de la corde OG, laquelle devient un diamètre de ce cercle. La tangente en G à la parabole P est représentée par l'équation :

$$(1) \quad 2\xi y + px + 2\xi^2 = 0.$$

Les coordonnées du second point d'intersection I' de cette tangente et du cercle C sont, dans l'hypothèse $\alpha - 2p = 0$:

$$(2) \quad x = \frac{-2p\xi^2}{4\xi^2 + p^2} , \quad y = \frac{-4\xi^3}{4\xi^2 + p^2}.$$

Digitized by Google

En éliminant ζ entre les équations (2), on trouve l'équation de la cissoïde, lieu demandé :

$$(3) \quad 2(x^2+y^2)x+py^2=0.$$

2° Les équations (2) donnent $\frac{x}{p}=\frac{y}{2\zeta}$, équation de la perpendiculaire abaissée du sommet O de la parabole sur la tangente en G à cette même parabole. En joignant cette dernière relation à l'équation (1), on voit que la cissoïde (3) est la podaire de la parabole, par rapport au sommet de cette parabole.

3° En mettant l'équation du cercle C sous la forme : $2x\zeta^2 - 2py\zeta - (x^2+y^2)=0$, on voit que ce cercle a pour enveloppe la cissoïde représentée par l'équation (3). Cette dernière équation, pour la construction de la courbe, se mettra sous la forme :

$$y^2(2R-x)-x^3=0,$$

en prenant $2R=-\frac{p}{2}$, et en se référant pour la signification de R à la définition de la cissoïde. Le point de contact de l'enveloppe et du cercle C est en I'. Le centre de ce cercle C est en O', milieu de OG. La normale à la cissoïde en I' est la droite $I'O'$, parce que cette droite joint ce point I' au centre instantané de rotation qui, par construction, est sur la droite $I'O'$, le symétrique de I' par rapport à O'.

Formules donnant directement l'équation du lieu géométrique décrit par deux sommets N', N'' du

Digitized by Google

triangle normal circonscrit (à la parabole P) correspondant au point M, (triangle tangent à cette parabole aux pieds des normales menées du point M), quand on connaît l'équation du lieu $f(\alpha, \beta) = 0$ *décrit par le troisième sommet* $N(\alpha, \beta)$.

Au moyen des formules données par Salmon et Desboves, désignées dans ce mémoire sous le nom de formules de Desboves, la recherche des lieux géométriques décrits par deux des sommets du triangle normal circonscrit correspondant au point $M(x_1, y_1)$, point de départ des trois normales, quand on connaît le lieu géométrique décrit par le troisième sommet $N(\alpha, \beta)$, offre une certaine longueur. La méthode de Desboves est la suivante : On donne le lieu géométrique décrit par le point $N(\alpha, \beta)$, pôle de la droite AB (A et B étant les pieds de deux des normales abaissées du point M sur la parabole P). Au moyen des formules de Desboves, on déduit de l'équation donnée du lieu géométrique décrit par le point N, celle du lieu géométrique inconnu décrit par le point M. Mais le point M correspond aux trois sommets N, N', N'' du triangle normal circonscrit ; il en résulte qu'en déduisant de l'équation du lieu décrit par le point M celle du lieu des sommets correspondants, on obtient une équation qui donne les lieux géométriques décrits simultanément par les trois sommets N, N', N''. Cette dernière équation renferme en facteur, dans son premier membre égalé à 0, le premier membre de l'équation donnée du lieu décrit par le sommet N. Il faut donc supprimer ce facteur pour obtenir, au premier membre de l'équation trouvée, celle du lieu décrit par les deux sommets

Digitized by Google

N' et N''. Nous proposons, pour arriver au même résultat, l'emploi d'une méthode infiniment plus simple qui donne immédiatement l'équation du lieu cherché, décrit par les deux sommets N' et N'', sans donner accessoirement l'équation du lieu décrit par le point $M(x_1, y_1)$.

A et B sont les pieds de deux normales menées du point $M(x_1, y_1)$ à la parabole P. Le point $N(\alpha, \beta)$ dont les coordonnées α et β sont données, est le pôle de la corde AB. G est le pied de la troisième normale menée du point M à la parabole. Des coordonnées α, β du point N, on déduit celles du point G qui sont $\left(\frac{2\beta^2}{p}, -2\beta\right)$. Notre méthode consiste à mener la tangente en G, à chercher les coordonnées X et Y des points d'intersection N' et N'' de cette tangente et du lieu du second degré formé par les deux tangentes NA et NB à la parabole. La tangente en G et les deux tangentes NA et NB sont les trois côtés du triangle normal circonscrit correspondant au point M. Après avoir obtenu ces coordonnées, X et Y, on exprime α et β en fonction de X et de Y. On trouve ainsi :

$$\alpha = \frac{Y}{p}\left(-Y \mp \sqrt{Y^2 - 2pX}\right) \quad , \quad \beta = \frac{-Y \pm \sqrt{Y^2 - 2pX}}{2}.$$

$f(\alpha, \beta) = 0$ étant l'équation donnée du lieu décrit par le sommet N,

$$f\left(\frac{Y}{p}\left(-Y \mp \sqrt{Y^2 - 2pX}\right) \quad , \quad \frac{-Y \pm \sqrt{Y^2 - 2pX}}{2}\right) = 0$$

sera l'équation cherchée du lieu décrit par les deux sommets N' et N'' du triangle normal circonscrit correspondant au point M.

Digitized by Google

Solution. — L'équation quadratique des deux tangentes NA, NB est :

$$(1) \quad (\beta^2 - 2p\alpha)(y^2 - 2px) - (\beta y - px - p\alpha)^2 = 0.$$

L'équation $\beta y - px - p\alpha = 0$ représente la polaire AB du point N. L'équation de la tangente en G est :

$$(2) \quad 2\beta y + px + 2\beta^2 = 0.$$

Après réductions, les abcisses des points d'intersection N' et N'' de cette tangente et des deux tangentes NA et NB sont données par l'équation :

$$(3) \quad (4\beta^2 + p\alpha)(px^2 + 2\beta^2 x + 2\beta^2\alpha) = 0.$$

On supprime le facteur $4\beta^2 + p\alpha$ qu'on suppose différent de 0, et, en remarquant que les formules ci-dessous s'appliquent également au cas où on a : $4\beta^2 + p\alpha = 0$, on tire α et β des équations (2) et (3) :

$$\alpha = \frac{y}{p}\left(-y \mp \sqrt{y^2 - 2px}\right) \quad , \quad \beta = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 - 2px}}{2}.$$

On porte ces deux valeurs α et β dans l'équation $f(\alpha, \beta) = 0$ du lieu décrit par le sommet $N(\alpha, \beta)$ du triangle normal circonscrit. Le lieu décrit par les sommets N' et N'' de ce même triangle sera :

$$f\left[\frac{y}{p}\left(-y \mp \sqrt{y^2 - 2px}\right) \quad , \quad \frac{-y \pm \sqrt{y^2 - 2px}}{2}\right] = 0.$$

Applications. — 1° Le pôle $N(\alpha, \beta)$, sommet du triangle normal circonscrit décrit la droite :

$$A\alpha + B\beta + C = 0.$$

Digitized by Google

Quel sera le lieu géométrique décrit par les deux autres sommets de ce triangle?

Nos formules donnent immédiatement l'équation demandée de ce lieu :

$$(4)\quad (2Ay + pB)(2Axy + Bpx - 2Cy) + 2pC^2 + 4ABy(y^2 - 2px) = 0.$$

Dans les remarques relatives à l'étude de la courbe μ, on a trouvé une courbe dont l'équation ne diffère de celle de la courbe (4) que par le dernier terme de l'équation de cette dernière courbe. Les équations des courbes en question ne différant que par ce dernier terme, seront identiques lorsqu'on aura soit $A=0$, soit $B=0$. Il en résulte que l'équation (4) est l'équation la plus générale de celles dont l'équation de la courbe μ est un cas particulier.

Pour $B=0$ et $C=-Ak$ $(\alpha - k=0)$, l'équation (4) devient :

$$2(x+k)y^2 + pk^2 = 0.$$

Pour $A=0$ et $C=-Bk$ $(\beta - k=0)$, l'équation (4) devient :

$$px + 2k(y+k) = 0$$

et on a le théorème suivant :

THÉORÈME. — Lorsqu'un des sommets du triangle normal circonscrit décrit un diamètre $\beta - k=0$ de la parabole P, les deux autres sommets se meuvent sur la droite $px + 2k(y+k)=0$, tangente à la parabole P au point dont l'ordonnée est $-2k$.

Digitized by Google

Pour $C=0$, le lieu donné du sommet N sera $A\alpha+B\beta=0$. On pose $-\frac{A}{B}=m$. Nos formules donnent l'équation du lieu des sommets N', N'' :

$$(2my-p)^2.x-4my(y^2-2px)=0$$

ou

$$(2my+p)^2.x-4my^3=0.$$

Supposons $m=1$; par conséquent $\beta-\alpha=0$ est l'équation du lieu décrit par le sommet N. L'équation du lieu géométrique des sommets N', N'' devient :

$$(5)\quad (2y+p)^2.x-4y^3=0.$$

Mais, en vertu de la relation $\beta-\alpha=0$, le lieu des deux sommets N' et N'', obtenu dans l'hypothèse $\beta-k=0$ (qui est la droite $px+2k(y+k)=0$), doit rencontrer le lieu des sommets N', N'', obtenu dans l'hypothèse $\alpha-k=0$ (soit $2(x+k)y^2+pk^2=0$) en deux points qui doivent se trouver sur le lieu géométrique des deux sommets N', N'', obtenu dans l'hypothèse $\beta-\alpha=0$.

Donc la droite (2) $px+2k(y+k)=0$ doit rencontrer la courbe $(2y+p)^2x-4y^3=0$ en deux points qui doivent être les mêmes que ceux où cette droite rencontre la courbe :

$$(6)\quad 2(x+k)y^2+pk^2=0.$$

Après avoir éliminé x entre les équations (2) et (5), on trouve :

$$4y^3+2(2k-p)y^2-kp^2=0.$$

Si on élimine x entre les équations (2) et (6), on trouve :

$$(4k+2p)y^3+4k(k+p)y^2+pk(4k+p)y+p^2k^2=0.$$

Digitized by Google

Or, l'avant-dernière équation peut s'écrire :

$$(2y^2 + 2ky + pk)(2y - p) = 0.$$

et la dernière :

$$(2y^2 + 2ky + pk)[(2k + p)y + pk] = 0.$$

Donc les coordonnées des deux points où la courbe du troisième ordre que décrivent les deux sommets N' et N'' dans l'hypothèse $\beta - \alpha = 0$ est rencontrée simultanément par les courbes que décrivent ces deux sommets dans les hypothèses successives : $\beta - k = 0$, $\alpha - k = 0$, sont données par les équations simultanées :

$$2y^2 + 2ky + pk = 0 \quad , \quad px + 2k(y + k) = 0.$$

Ces points de rencontre ne sont réels que si on a :

$$k(k - 2p) \geqq 0.$$

Si la droite $A\alpha + B\beta + C = 0$ décrite par le sommet $N(\alpha, \beta)$ est tangente à la parabole P, on a $p = \frac{2AC}{B^2}$. L'équation (4) du lieu décrit par N' et N'' se décompose comme il suit : $(By - C)^2(Ax + By + C) = 0$. Donc deux sommets décrivent la tangente :

$$Ax + By + C = 0$$

pendant que le troisième décrit une parallèle à l'axe. Rappelons ici ce théorème connu : lorsque deux sommets d'un triangle circonscrit à une conique D décrivent chacun une droite, le troisième sommet décrit une conique doublement tangente à cette conique D.

2° Le pôle N, sommet du triangle normal circonscrit correspondant au point $M(x_1, y_1)$, décrit la parabole $\beta^2 - 2q\alpha = 0$. Quel est le lieu géométrique décrit par les deux autres sommets N', N'' ?

Digitized by Google

Si on résout ce problème au moyen des formules de Desboves, on cherche d'abord le lieu décrit par le point $M(x_1, y_1)$, en éliminant α et β entre l'équation $\beta^2 - 2q\alpha = 0$ et les deux formules de Desboves. On trouve ainsi :

$$(7) \quad (4q - p)^3 y_1^2 - 8pq(x_1 - p)^3 = 0,$$

équation d'une parabole cubique qui n'est la développée de la parabole P que si on a :

$$(4q - p)^3 - 27p^2 q = (q - p)(8q + p)^2 = 0.$$

Remplaçant dans (7) $x_1 - p$ et y_1 par leur valeur tirée des formules de Desboves, on a :

$$16q\beta^6 - 24pq\alpha\beta^4 + 12p^2 q\alpha^2\beta^2 - 2qp^3\alpha^3 = (\beta^2 - 2q\alpha)(16q\beta^4 + 8q(4q - 3p)\alpha\beta^2 + p^3\alpha^2) = 0.$$

Le deuxième facteur du premier membre de la dernière équation égalé à 0, est l'équation du lieu cherché des sommets N' et N''. Mais la décomposition de l'équation du sixième degré en β, en facteurs du second et du quatrième degré, est assez longue.

Nos propres formules donnent immédiatement, si $\beta^2 - 2q\alpha = 0$ est l'équation donnée de la courbe décrite par le sommet N, le lieu géométrique des deux autres sommets N' et N'' :

$$16qy^4 + 8q(4q - 3p)xy^2 + p^3x^2 = 0$$

d'où on tire :

$$\frac{y^2}{x} = \frac{q(3p - 4q) \pm \sqrt{q(q - p)(4q - p)^2}}{4q},$$

Digitized by Google

équation qui représente deux paraboles. On examinera successivement, au moyen de cette dernière équation, les hypothèses suivantes : $q-p=0$, $4q-p=0$, $8q+p=0$, $4q+p=0$, correspondantes aux cas où le sommet $N(\alpha, \beta)$ décrit les paraboles $\beta^2-2p\alpha=0$, $2\beta^2-p\alpha=0$, $4\beta^2+p\alpha=0$, $2\beta^2+p\alpha=0$.

L'équation précédente en x et y donne immédiatement les lieux géométriques correspondants, décrits par les deux autres sommets N' et N'' du triangle normal circonscrit.

Coordonnées des sommets N' et N'' en fonction de celles du point N (α, β). — Les coordonnées des points communs aux deux tangentes *NA* et *NB* et à la tangente en *G*, sont celles des deux sommets *N'*, *N''* du triangle normal circonscrit. Elles s'obtiennent en résolvant les deux équations simultanées :

$$2\beta^2+2\beta y+px=0 \quad \text{et} \quad px^2+2\beta^2 x+2\alpha\beta^2=0.$$

On trouve ainsi pour les coordonnées de N' :

$$x'=\frac{\beta}{p}\left(-\beta+\sqrt{\beta^2-2\alpha p}\right) \quad , \quad y'=\frac{1}{2}\left(\beta+\sqrt{\beta^2-2\alpha p}\right);$$

pour les coordonnées de N'' :

$$x''=-\frac{\beta}{p}\left(+\beta+\sqrt{\beta^2-2\alpha p}\right) \quad , \quad y''=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-2\alpha p}}{2}.$$

Comme application, on propose de trouver : *le lieu géométrique des sommets des triangles de surface constante* m^2, *circonscrits à la parabole* P, *et tels que les normales aux points de contact se coupent en un même point* M.

Digitized by Google

On a :

$$2S = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = \frac{\pm\sqrt{\beta^2 - 2\alpha p}(4\beta^2 + \alpha p)}{p}.$$

L'équation du lieu géométrique demandé est donc :

$$(\beta^2 - 2\alpha p)(4\beta^2 + \alpha p)^2 - 4p^2 m^4 = 0.$$

On obtient en quelque sorte comme corollaire : le lieu des points $M(x_1, y_1)$, tels que le triangle ayant pour sommets les points d'incidence A, B, G des normales menées de chacun d'eux à la parabole P ait une surface constante m^2.

Il suffit, dans la dernière équation, de remplacer α et β par leur valeur en fonction de x_1 et de y_1 donnée par les formules de Desboves :

$$27p^2 y_1^2 - 8p(x_1 - p)^3 + 4m^4 = 0.$$

En désignant par X_1, Y_1 les coordonnées du point A, par X_2, Y_2 les coordonnées du point B (on sait que celles du point G sont $\frac{2\beta^2}{p}$, -2β), on a l'expression ci-dessous de la surface du triangle qui a pour sommets les trois points d'incidence des normales menées du point M à la parabole :

$$2S = \begin{vmatrix} \frac{2\beta^2}{p} & -2\beta & 1 \\ X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2\beta^2}{p}(Y_1 - Y_2) + 2\beta(X_1 - X_2) + X_1 Y_2 - X_2 Y_1$$
$$= (Y_1 - Y_2)\left(\frac{4\beta^2}{p} + \alpha\right) = \frac{2\sqrt{\beta^2 - 2p\alpha}}{p}(4\beta^2 + \alpha p)$$

Digitized by Google

Donc, l'aire du triangle qui a pour sommets les points d'incidence des normales menées du point M à la parabole, est double de celle du triangle normal circonscrit correspondant au point M, résultat connu.

Remarque. — Les deux formules de Desboves représentent deux coniques $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$. Si α et β sont les coordonnées courantes, x_1 et y_1 celles du point M, les points communs à ces deux coniques seront les sommets N, N', N'' du triangle normal circonscrit correspondant au point M. Le discriminant de la fonction $\varphi + \lambda\varphi' = 0$ sera :

$$2y_1\lambda^3 - 2(x_1 - p)\lambda^2 + p$$
$$= (2\beta\lambda - p)\left(\lambda^2 + \frac{py_1 - 2\beta(x_1 - p)}{2\beta y_1}\lambda - \frac{\beta}{y_1}\right) = 0.$$

en remarquant qu'on a :

$$4\beta^3 - 2(x_1 - p)p\beta + p^2 y_1 = 0.$$

La racine $\lambda = \frac{p}{2\beta}$ donnera un couple de sécantes communes à $\varphi = 0$ et $\varphi' = 0$ représenté par l'équation :

$$(y - \beta)(px + 2\beta y + 2\beta^2) = 0.$$

Le facteur $y - \beta = 0$ donne le sommet $N(\alpha, \beta)$; l'autre facteur, égalé à 0, représente la tangente en G à la parabole P. Cette tangente rencontre les deux tangentes NA et NB aux sommets N' et N'' cherchés. Remarquons en outre que, de l'équation quadratique de ces tangentes NA et NB déjà donnée, on tire l'équation séparée de chacune chacune d'elles :

Digitized by Google

$$2\alpha y - \beta(x+\alpha) = \pm\sqrt{\beta^2 - 2p\alpha}(x-\alpha);$$

on a donc les équations des trois côtés du triangle normal.

Équation du cercle C'' circonscrit au triangle normal circonscrit correspondant au point M (x_1, y_1). — Cette équation s'obtient en fonction des coordonnées du sommet $N(\alpha, \beta)$, en remarquant que le centre du cercle C'' se trouve à l'intersection des perpendiculaires élevées au milieu des cordes $N'N''$ et NF, car ce cercle passe par le foyer F de la parabole P.

On obtient ainsi l'équation :

$$2p(x^2+y^2) + (4\beta^2 - 2\alpha p - p^2)x - 4\alpha\beta y + p(\alpha p - 2\beta^2) = 0.$$

En exprimant les coordonnées du sommet $N(\alpha, \beta)$ en fonction de celles du point $M(x_1, y_1)$, on obtient :

$$(C'')\quad 2(x^2+y^2) + (2x_1 - 3p)x + 2y_1 y + p(p - x_1) = 0.$$

Cette équation est beaucoup plus simple que celle qu'on obtiendrait au moyen des équations déjà données des trois côtés ***GN'*** (N''), ***NA*** (N'), ***NB*** (N'') du triangle, ou bien que l'équation sous la forme du déterminant exprimant que le cercle C'' passe par les sommets N, N', N'' dont les coordonnées se trouvent plus haut. A notre connaissance, cette forme (C'') ne se trouve dans aucun recueil.

1° L'axe radical des cercles C'' et C est représenté par l'équation :

$$(4x_1 - p)x + 3y_1 y + p(p - x_1) = 0.$$

Digitized by Google

2° Si le sommet $N(\alpha, \beta)$ du triangle normal circonscrit correspondant au point M se meut sur une perpendiculaire $\alpha - k = 0$ à l'axe de la parabole P, cet axe radical enveloppe une conique représentée par l'équation :

$$9k^2y^2 - 2p(4x - p)[(3p - 4k)x + kp] = 0.$$

Si ce sommet N décrit un diamètre $\beta - k = 0$ de la parabole P, cet axe radical passe par un point fixe dont les coordonnées sont :

$$x = \frac{2pk^2}{3p^2 + 8k^2} \quad ; \quad y = \frac{p^3}{2k[3p^2 + 8k^2]}.$$

3° Si ce sommet N se meut sur la directrice de la parabole P, le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle normal circonscrit est la parabole :

$$P'' \ (4y^2 + px = 0).$$

4° Si le point $M(x_1, y_1)$ décrit une courbe :

$$f(x_1, y_1) = 0,$$

le centre $(X_{c''}, Y_{c''})$ du cercle C'' décrira un lieu représenté par l'équation :

$$f\left(\frac{3p}{2} - 2X_{c''} \quad ; \quad -2Y_{c''}\right) = 0.$$

5° On suppose que le point $M(x_1, y_1)$ se meuve sur la développée de la parabole P. Le centre radical des trois cercles C, C', C'' viendra alors sur la parabole P : en N si N est sur la parabole P,

Digitized by Google

en G si N est sur la parabole P'. Le centre du cercle C'' décrira la courbe du troisième ordre :

$$4py^2 + \left(\frac{4x - p}{3}\right)^3 = 0.$$

De plus, deux sommets du triangle normal circonscrit se confondront en un seul et l'aire de ce triangle sera nulle. Si le point $M(x_1, y_1)$ se trouve sur la développée, le sommet $N(\alpha, \beta)$ du triangle se trouvera sur une des deux paraboles P ou P'. Dans le premier cas on a $\beta^2 - 2p\alpha = 0$. La tangente en G à la parabole P, sur laquelle se trouvent les deux sommets N', N'', sera tangente au cercle C'' en ce point N' avec lequel s'est confondu le sommet N''. Le sommet N' $\left(-2\alpha ; -\frac{\beta}{2}\right)$ sera situé sur la parabole P'. Dans le deuxième cas on a $4\beta^2 + p\alpha = 0$, le cercle C'' passera par le point $G\left(\frac{2\beta^2}{p} ; -2\beta\right)$ de la parabole P qui deviendra le sommet N'' ; et le sommet $N(\alpha, \beta)$, situé sur la parabole P', se confondra avec le sommet N'.

6° Le point $M(x_1, y_1)$ ne viendra sur le cercle C'' que dans le cas où ce point sera placé au foyer de la parabole P.

Digitized by Google

ERRATUM

Page 144. — Ligne 4 (avant le trait) ajouter *tout* ce qui suit :

Dans la dernière équation, le signe + correspond au côté opposé au sommet N'' (x'', y'').

THÉORÈME. - *Le point de concours des hauteurs du triangle normal circonscrit correspondant au point* M (x_1, y_1) *est le point de rencontre de la directrice et du diamètre (de la parabole) qui passe par le point* M.

Pour le démontrer, il suffit d'écrire l'équation des perpendiculaires abaissées des sommets N et N' sur les côtés opposés, et de faire dans ces équations $x = -\frac{p}{2}$. On trouve : $y = -\frac{2\alpha\beta}{p} = y_1$ (ordonnée du point M). Examiner le cas particulier ou $x_1 = -\frac{p}{2}$.

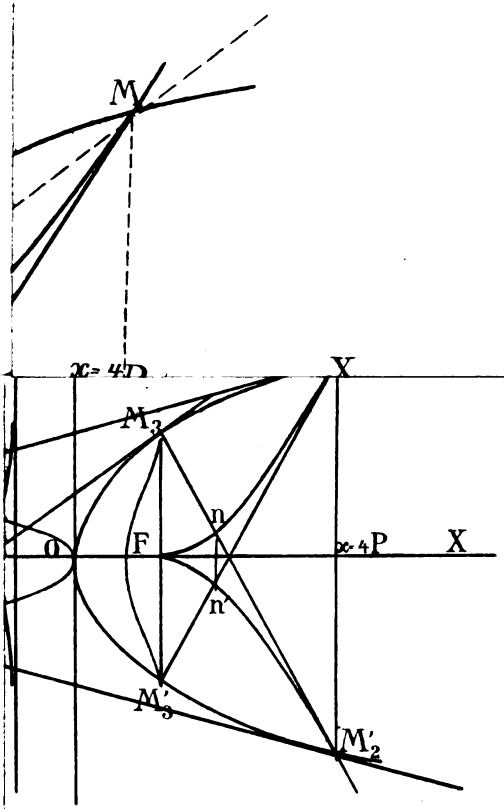
Ce théorème est le complément nécessaire du théorème de Steiner, relatif aux hauteurs des triangles circonscrits à la parabole. Il est dû à l'auteur de ce mémoire.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fi

(Problè



re 5.

lèmes 14 et 15.

Digitized by Google

Digitized by Google

PROGRAMME

DES

CONCOURS OUVERTS PENDANT L'ANNÉE 1903-1904

L'Académie a trois sortes de concours :

§ I. *Les concours purement académiques ;*

§ II. *Le concours du prix Herpin ;*

§ III. *Les concours des prix de vertu.*

§ I. CONCOURS ACADÉMIQUES.

PROGRAMME POUR 1903-1904.

L'Académie décernera, comme d'habitude, s'il y a lieu, dans sa séance solennelle du mois de mai 1904, des médailles d'or, de vermeil, d'argent, de bronze, et des mentions honorables aux meilleurs travaux concernant les Lettres, les Sciences, les Arts et l'Agriculture.

Elle pose particulièrement comme objets de ce concours les questions suivantes :

1° Étude des principales propriétés des cubiques planes.

2° Examen des cultures nouvelles qu'il y aurait avantage à introduire en Lorraine.

3° Moyens pratiques de réaliser la question des habitations ouvrières à Metz et dans la région ; avec plans à l'appui.

Digitized by Google

4° Examen comparatif des divers systèmes d'éclairage domestique.

5° De l'influence du déboisement sur le climat d'un pays.

6° Est-il possible de trouver un moyen pratique pour extraire l'électricité directement du sol, sans l'intermédiaire de machines, et cela, à l'imitation du nuage orageux qui s'est chargé de l'électricité du sol, grâce à la chaleur humide ?

7° De la situation actuelle des ouvrières employées dans la petite industrie, et des moyens légaux à établir pour améliorer leur sort.

8° Histoire de la Presse en Lorraine.

9° Histoire des houillères, salines et de la métallurgie en Lorraine, ou d'une autre industrie.

10° Tableau des changements successifs survenus dans la ville de Metz : étendue, emplacement, enceinte, direction des rues, etc.

11° Des moyens de connaître la nature du sol pour faire produire aux terres cultivables le maximum de rendement (parmi ces moyens, l'Académie indique spécialement l'examen microscopique).

NB. — *L'Académie admet, d'ailleurs, à ses concours, tout travail intellectuel pouvant avoir un intérêt spécial ou général pour le pays.*

---

§ II. **PRIX HERPIN.**

Ce prix de 640 Mark ou 800 francs, à distribuer de quatre en quatre ans, sera décerné pour la troisième fois en 1904.

Le choix du sujet est abandonné, comme la première fois, aux concurrents ; il doit cependant

Digitized by Google

concerner, selon les intentions du fondateur, « *un sujet d'utilité ou d'intérêt particulier pour la ville de Metz ou ses environs.*

L'Académie a été mise à même, cette année-ci, par une tierce personne, de récompenser d'un prix en argent un travail s'appliquant à la question nº 3 ci-dessus. Ce prix, dont l'importance n'est pas limitée, sera décerné à l'auteur, si son travail en est jugé digne par l'Académie, et proportionnellement à la valeur qu'elle lui reconnaîtra, ainsi qu'à l'utilité qu'il aura pour aider à la mise en pratique du sujet traité.

Observations générales relatives aux Concours.

Le Règlement de l'Académie lui interdit toute discussion de questions politiques ou religieuses. Les concurrents sont priés instamment de tenir compte de cette prescription dans les travaux qu'ils voudront bien lui adresser.

L'Académie n'admet au concours que des œuvres inédites (1).

Les mémoires présentés devront être adressés directement et franco, avant le 15 janvier 1904 *(cette date est de rigueur)*, à

Monsieur le Secrétaire de l'Académie
rue de l'Évêché, 25, à Metz.

Les concurrents ne doivent pas se faire connaître.

---

(1) Une exception à cette règle peut être faite en faveur des concurrents au prix Herpin.

Digitized by Google

Cependant les auteurs de travaux qui, pour être appréciés, ont besoin d'être suivis d'expériences, pourront se nommer, afin de mettre l'Académie à même de vérifier avec eux l'exactitude des résultats indiqués.

Chaque œuvre portera une devise, reproduite sur un billet cacheté. Dans ce billet, l'auteur inscrira son adresse ; il attestera, en outre, que *son œuvre n'a été présentée à aucun autre concours.*

Les auteurs de mémoires, qui auraient pris part à des concours antérieurs de l'Académie de Metz, *auront soin de ne pas se servir de leurs anciennes devises.*

D'après l'article 3 du Règlement de l'Académie, les *membres titulaires* ne peuvent concourir pour les prix proposés. Par contre, les *membres correspondants* et les *associés-libres* n'en sont point exclus.

Les manuscrits envoyés pour les concours ne sont pas rendus (1). Les auteurs pourront toutefois, sur leur demande, être autorisés à en faire prendre des copies au Secrétariat de l'Académie.

---

§ III. PRIX DE VERTU.

Les rentes des fondations faites, dans ces dernières années, à l'Académie, par M. le baron J.-C.-F. de Ladoucette, M. J.-F. Pécheur et Mlle Bouchotte, seront également distribuées, sous forme de prix de vertu, dans la séance académique du troisième jeudi du mois de mai.

(1) Une exception à cette règle peut être faite en faveur des concurrents au prix Herpin.

Digitized by Google

A l'occasion de ce concours, l'Académie croit important d'indiquer enfin, d'une manière bien précise et bien nette, le but exact de cette louable institution. Dans la pensée de ses fondateurs, cette œuvre n'est en principe nullement destinée à venir en aide à la misère humaine, sous ses formes multiples, mais, plutôt, il importe de le bien remarquer, à récompenser, par un hommage public et solennel, toutes personnes que leur conduite charitable, leur dévouement désintéressé, leur générosité remarquable envers des étrangers et même des membres de leur famille, auraient signalées d'une façon toute spéciale à la considération et à l'estime de leurs concitoyens.

Elle croit utile de faire remarquer aussi que ces prix de vertu peuvent être obtenus indistinctement par toute personne méritante, habitant le département actuel de la Lorraine.

Enfin, elle renouvelle la prière qu'elle a adressée déjà aux autorités civiles et religieuses, de vouloir bien lui signaler les personnes de leur localité qui présenteraient les titres mentionnés ci-dessus, afin qu'elle soit à même de remplir le plus exactement et le plus consciencieusement possible la délicate mission qui lui a été confiée.

Toutes les demandes ou communications relatives aux prix de vertu devront être adressées *directement et franco,* avant le 15 janvier 1904, à *M. le Secrétaire de l'Académie,* rue de l'Évêché, 25, à Metz.

Digitized by Google

Digitized by Google

APPENDICE

Digitized by Google

Digitized by Google

OUVRAGES IMPRIMÉS

OFFERTS A L'ACADÉMIE

PENDANT L'ANNÉE 1902-1903

I. Ouvrages divers

Coste. *Essai de la flore du sud-ouest de la France...* achevé par l'abbé H. Coste. 2e partie (suite). In-8o. Rodez, 1900. Carrère.

Dorveaux. *Une thèse de pharmacie soutenue à Metz en 1677*, et un *Mémoire d'apothicaire pour Paul Ferry, ministre protestant à Metz*, publiés par le Dr Paul Dorveaux. In-8o.

— *Inventaires d'anciennes pharmacies dijonnaises (XVe siècle)*, publiés avec des notes par le Dr Paul Dorveaux. Avec une introduction par M. Léon Kauffeisen. In-8o.
Dijon, 1892. Jacquot et Floret.

— *Inventaire de la pharmacie de l'hôpital Saint-Nicolas de Metz (27 juin 1509)*, publié pour la première fois par le Dr Paul Dorveaux, avec une préface de M. Lorédan Larchey. In-8o.
Paris, 1894. H. Welter. — Nancy. Sidot frères.

— *Le Myrouel des apothiquaires et pharmacopoles*, par Symphorien Champier. Nouvelle édition revue, annotée et corrigée par le Dr Paul Dorveaux. Préface de M. G. Planchon. In-8o.
Paris, 1895. H. Welter.

— *L'Antidotaire Nicolas.* Deux traductions françaises de l'*Antidotarium Nicolai*, l'une du XIVe

Digitized by Google

siècle,... avec fac-simile... Préface de M. Antoine Thomas. In-8°. Paris, 1896. H. Welter.

— *Notice sur la vie et les œuvres de Thibault Lespleigney (ou Lépleigney), apothicaire à Tours (1496? — 1550).* In-8°. Paris, 1898. H. Welter.

— *Promptuaire des médecines simples en rithme joieuse, par Thibault Lespleigney, apothicaire à Tours.* Nouvelle édition par le Dr Paul Dorveaux. Préface de M. Émile Roy. In-8°.
Paris, 1899. H. Welter.

— *Déclaration des abuz et tromperies que font les apoticaires... par maistre Lisset Benancio (Sébastien Colin).* Nouvelle édition revue, corrigée et annotée par le Dr Paul Dorveaux. Avec notice sur la vie et les œuvres de Sébastien Colin. In-8°. Paris, 1901. H, Welter.

— *Factum pour Nicolas Du Ruisseau, Apothicaire de la Grande Écurie du Roi (Louis XIV), etc....* Nouvelle édition conforme à la première, publiée par le Dr Paul Dorveaux. In-8°.
Dijon, 1903. Jacquot et Floret.

HOULLIER A. *Le Jardin.* Étude littéraire, par M. l'abbé Houllier, membre de plusieurs Sociétés savantes. 1 vol. in-8°.
Saint-Valéry-sur-Somme, 1902. Lefebvre.

INGOLD A.-M.-P. *Documents pour servir à l'histoire religieuse des XVIIe et XVIIIe siècles. Mémoires domestiques pour servir à l'histoire de l'Oratoire. Les Pères de l'Oratoire... qui ont vécu sous le cardinal de Bérulle,* par le P. Louis Batterel. 1 vol. in-8°.
Paris, 1902. A. Picard.

JOULIN LÉON. *Les établissements gallo-romains de la plaine de Martres-Tolosanes.* 1 vol. in-4°.
Paris, 1900. C. Klincksieck.

Digitized by Google

LUCHAIRE A. *Université de Paris. Bibliothèque de la Faculté des lettres.* XIII. *Mélanges d'histoire du moyen-âge.* Trois études par Luchaire, L. Halphen et G.-A. Hückel. 185 pages in-8°. Paris, 1901. Félix Alcan.

TOUTEY E. *Charles le Téméraire et la Ligue de Constance.* Supplément au Bulletin de la Société belfortaine d'émulation. 1 vol. in-8°. Paris, 1902 Hachette.

VAN DER STRATEN-PONTHOZ. *Société scientifique de Bruxelles.* 1 plaq. in-8°. Paris, 1901. Gauthier-Villars.

II. — PUBLICATIONS DES ACADÉMIES, DES SOCIÉTÉS SAVANTES, ETC.

EUROPE

ALLEMAGNE (EMPIRE D').

ALSACE-LORRAINE. **Metz.** *Jahrbuch der Gesellschaft für lothringische Geschichte und Altertumskunde.* XIV. Jahrgang. Metz.

— — *Jahresbericht des Vereins für Erdkunde zu Metz*, für das Vereinsjahr 1901. Metz.

— — *Bulletin de la Société d'histoire naturelle de Metz.* 22e cahier. Metz.

— **Colmar.** *Bulletin de la Société d'histoire naturelle de Colmar.* Nouvelle série. 1901-1902. Colmar.

— — *Revue d'Alsace.* 1902. Paris, Colmar.

— **Mulhouse.** *Bulletin de la Société industrielle de Mulhouse.* Année 1902, 9 bulletins. Paris-Mulhouse.

Digitized by Google

— — *Société industrielle de Mulhouse. Procès-verbaux de la Société et des Comités.* 1902. Mulhouse.

— **Strasbourg.** *Société des sciences, agriculture et arts de la Basse-Alsace.* Bulletin mensuel. Année 1902.

— — *Jahrbuch für Geschichte, Sprache und Litteratur Elsass-Lothringens*, herausgegeben von dem Historisch-litterarischen Zweigverein des Vogesen-Clubs. 1902. Strassburg.

BAVIÈRE. **Munich.** *Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und der historischen Klasse der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München.* 1902. Hefte I-IV. München.

— — *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München.* 1902. 3 Hefte. München.

— — *Abhandlungen der philosophisch-philologischen Klasse der k. b. Akademie der Wissenschaften.* 1902. München.

— — *Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse der k. b. Akademie der Wissenschaften.* 1902. München.

— — *Abhandlungen der historischen Klasse der k. b. Akademie der Wissenschaften.* 1902. München.

PRUSSE. **Brême.** *Abhandlungen herausgegeben vom naturwissenschaftlichen Verein zu Bremen.* XVII. Band, Heft II. Bremen.

— **Königsberg.** *Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg in Pr.* 1901. Königsberg.

Digitized by Google

SAXE. **Halle.** *Nova acta Academiae Cesareae Leopoldino-Carolinae Germanicae naturae curiosorum.* 80. Band. Halle.

ANGLETERRE. **Cambridge.** *Proceedings of the Cambridge philosophical Society.* Vol. XII, part I-III. Cambridge.

— **Manchester.** *Memoirs and proceedings of the Manchester literary and philosophical Society.* 1902-1903. Manchester.

AUTRICHE-HONGRIE. **Görlitz.** *Neues Lausitzisches Magazin.* Im Auftrage der Oberlausitzischen Gesellschaft der Wissenschaften, herausgegeben von Dr. Richard Jecht. 1902. Görlitz.

— — *Codex diplomaticus Lusatiae superioris.* Bd. II, Heft 3. Görlitz.

— **We Lwowie.** *Kwartalnik historyczny. Organ Towarzystwa historycznego przez Xaverego Liskego.* 1901. I-IV. We Lwowie.

BELGIQUE. **Arlon.** *Institut archéologique du Luxembourg.* Annales. 1902. Arlon.

— **Anvers.** *Bulletin de l'Académie royale d'archéologie de Belgique.* 5e série des Annales. 1902. Anvers.

— **Bruxelles.** *Annuaire de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.* Année 1902. Bruxelles.

— — *Académie royale de Belgique. Bulletins de la classe des sciences.* 1902. Bruxelles.

— — — *Bulletins de la classe des lettres et des sciences morales et politiques et de la classe des beaux-arts.* 1902. Bruxelles.

Digitized by Google

— — *Mémoires couronnés et autres mémoires* publiés par l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Tome LX, 1902. Bruxelles.

— — *Annales de la Société royale malacologique de Belgique.* 1901. Bruxelles.

— **Gand.** *Bulletijn der Maatschappij van Geschied en Oudheidkunde te Gent.* 1902. Gand.

— — *Handelingen des Maatschappij.* Tome IV, 1902. Gand.

— **Liége.** *Bulletin de l'Institut archéologique liégeois.* 1901. Liége.

— — *Mémoires de la Société royale des sciences de Liége.* 3e série, tome IV. 1902. Liége.

— — *Annales de la Société géologique de Belgique.* Tome XXX. 1902. Liége.

— **Maredsous** (abbaye). *Revue bénédictine.* Année 1902. Maredsous.

— **Mons.** *Mémoires et publications de la Société des sciences, des arts et des lettres du Hainaut.* 1902. Mons.

FRANCE.

AIN. **Bourg.** *Annales de la Société d'émulation et d'agriculture (lettres, sciences et arts) de l'Ain.* 1902. 4 livraisons. Bourg.

ALPES-MARITIMES. **Nice.** *Annales de la Société des lettres, sciences et arts du département des Alpes-Maritimes.* 1901. Nice.

AUBE. **Troyes.** *Mémoires de la Société académique d'agriculture, sciences, arts et belles-lettres du département de l'Aube.* Tome 65. 1901. Troyes.

Digitized by Google

BELFORT. **Belfort.** *Bulletin de la Société belfortaine d'émulation.* 1901. Belfort.

BOUCHES-DU-RHONE. **Aix.** *Mémoires de l'Académie des sciences, agriculture, arts et belles-lettres d'Aix.* 1901. Aix.

CALVADOS. **Caen.** *Mémoires de l'Académie nationale des sciences, arts et belles-lettres de Caen.* 1901. Caen.

— — *Bulletin de la Société des antiquaires de Normandie.* 1900. Caen.

— — *Bulletin de la Société linnéenne de Normandie.* 1902. Caen.

CHARENTE-INFÉRIEURE. **Rochefort.** *Bulletin de la Société de géographie de Rochefort.* 1902. Rochefort.

DOUBS. **Besançon.** *Académie des sciences, belles-lettres et arts de Besançon. Procès-verbaux et mémoires.* Année 1901. Besançon.

EURE. **Évreux.** *Recueil des travaux de la Société libre d'agriculture, sciences, arts et belles-lettres de l'Eure.* 5e série, t. IX. 1901. Évreux.

FINISTÈRE. **Brest.** *Bulletin de la Société académique de Brest.* 2e série, t. XXVI. Brest.

GARD. **Nîmes.** *Mémoires de l'Académie de Nîmes.* 7e série, t. XXIV. Nîmes.

HAUTE-GARONNE. **Toulouse.** *Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse.* 10e série, t. I. Toulouse.

— — *Recueil de l'Académie des Jeux floraux.* Année 1902. Toulouse.

— — *Journal d'agriculture pratique et d'économie rurale pour le Midi de la France.* Année 1902. Toulouse.

Digitized by Google

GIRONDE. **Bordeaux.** *Actes de la Société linnéenne de Bordeaux.* Volume LVI. Bordeaux.

— — *Actes de l'Académie nationale des sciences, belles-lettres et arts de Bordeaux.* 3e série ; 62e année. 1900. Paris.

INDRE-ET-LOIRE. **Tours.** *Annales de la Société d'agriculture, sciences, arts et belles-lettres du département d'Indre-et-Loire.* Tome LXXXII. 1902. Tours.

ISÈRE. **Grenoble.** *Bulletin de l'Académie delphinale.* Tome XV. 1901. Grenoble.

JURA. **Lons-le-Saulnier.** *Mémoires de la Société d'émulation du Jura.* 7e série, 1er volume. 1901. Lons-le-Saulnier.

LANDES. **Dax.** *Bulletin de la Société de Borda.* 1902. Dax.

LOIRE. **Saint-Étienne.** *Annales de la Société d'agriculture, industrie, sciences, arts et belles-lettres du département de la Loire.* 2e série, t. XXII. 1902. Saint-Étienne.

LOIRE (HAUTE-). **Le Puy.** *Annales de la Société d'agriculture, sciences, arts et commerce du Puy.*

LOIRE-INFÉRIEURE. **Nantes.** *Annales de la Société académique de Nantes et du département de la Loire-Inférieure.* 8e série, vol. II. 1901. Nantes.

LOIRET. **Orléans.** *Société archéologique et historique de l'Orléanais. Bulletin.* 1901. Orléans.

LOZÈRE. **Mende.** *Bulletin de la Société d'agriculture, industrie, sciences et arts du département de la Lozère.* Année 1901, 4 livraisons. Mende.

MAINE-ET-LOIRE. **Angers.** *Mémoires de la Société nationale d'agriculture, sciences et arts d'Angers.* 5e série, tome IV. 1901. Angers.

Digitized by Google

— — *Bulletin de la Société industrielle et agricole d'Angers et du département de Maine-et-Loire.* 5e série, tome III. 1901. Angers.

MANCHE. **Cherbourg.** *Mémoires de la Société des sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg.* t. XXXII.

MARNE. **Reims.** *Travaux de l'Académie nationale de Reims.* Volumes 109, 110. Année 1901. Reims.

MEURTHE-ET-MOSELLE. **Nancy.** *Mémoires de l'Académie de Stanislas.* 5e série, t. XIX. 1902. Nancy.

— — *Mémoires de la Société d'archéologie lorraine et du Musée historique lorrain.* Tome LII. 1902. Nancy.

MEUSE. **Bar-le-Duc.** *Mémoires de la Société des lettres, sciences et arts de Bar-le-Duc.* 3e série, vol. X. 1901. Bar-le-Duc.

MORBIHAN. **Vannes.** *Bulletin de la Société polymatique du Morbihan.* 1901. Vannes.

NORD. **Cambrai.** *Mémoires de la Société d'émulation de Cambrai.* 1901. Cambrai.

— **Douai.** *Mémoires de la Société d'agriculture, sciences et arts, à Douai.* Célébration du centenaire.

OISE. **Beauvais.** *Mémoires de la Société académique d'archéologie, sciences et arts du département de l'Oise.* T. XVIII, 1re partie. Beauvais.

PUY-DE-DOME. **Clermont.** *Revue d'Auvergne*, publiée par la Société des Amis de l'Université de Clermont. 19e année. 6 livraisons. 1902. Clermont-Ferrand.

PYRÉNÉES-ORIENTALES. **Perpignan.** *Société agricole, scientifique et littéraire des Pyrénées-Orientales.* 43e vol. 1902. Perpignan.

Digitized by Google

RHONE. **Lyon.** *Annales de la Société d'agriculture, sciences et industrie de Lyon.* 7e série, t. IX. 1901. Lyon-Paris

— — *Mémoires de l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon.* T. VI. 1901. Lyon-Paris.

SAONE-ET-LOIRE. **Autun.** *Mémoires de la Société Éduenne des lettres, sciences et arts.* 1902. Autun.

HAUTE-SAONE. **Vesoul.** *Bulletin de la Société d'agriculture, sciences et arts du département de la Haute-Saône* 4e série, vol. I. Vesoul.

SEINE. **Paris.** *Bulletin de la Société nationale des antiquaires de France.* Année 1901. Paris.

— — *Bulletin et Mémoires de la Société nationale des antiquaires de France.* Tome LXI. Année 1900. Paris.

— — *Bulletin de la Société nationale d'acclimatation de France* (Revue des sciences naturelles appliquées). 1902, 3 fasc. Paris.

— — *Bulletin des séances de la Société nationale d'agriculture de France.* Année 1902, 10 livraisons. Paris.

— — *Mémoires publiés par la Société nationale d'agriculture de France.* Tome CXXXIX, 1901. Paris.

SEINE-ET-OISE. **Versailles.** *Revue de l'Histoire de Versailles et de Seine-et-Oise.* 1901, 4 livraisons. Versailles-Paris.

SEINE-INFÉRIEURE. **Le Hâvre.** *Recueil de publications de la Société hâvraise d'études diverses.* Année 1901. Le Hâvre.

— **Rouen.** *Précis analytique des travaux de l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Rouen.* 1902. Rouen.

Digitized by Google

— — *Bulletin de la Société libre d'émulation du commerce et de l'industrie de la Seine-Inférieure.* Année 1899-1900. Rouen.

— — *Bulletin de la Société des amis des sciences naturelles de Rouen.* Année 1900. Rouen.

— — *Extrait des travaux de la Société centrale d'agriculture du département de la Seine-Inférieure.* Année 1902. Rouen.

— — *Bulletin de la Société centrale d'horticulture du département de la Seine-Inférieure.* Année 1902. Rouen.

SOMME. **Amiens.** *Bulletin de la Société des antiquaires de Picardie.* 1902. 8 nos. Amiens.

— — *Mémoires de l'Académie des sciences, des lettres et des arts d'Amiens.* 1901. Amiens.

— **Abbeville.** *Bulletin de la Société d'émulation d'Abbeville.* 1901. Abbeville.

TARN-ET-GARONNE. **Montauban.** *Recueil de l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Tarn-et-Garonne.* Tome XVII. 1901. Montauban.

VAR. **Toulon.** *Bulletin de l'Académie du Var.* 1901. Toulon.

VAUCLUSE. **Avignon.** *Mémoires de l'Académie de Vaucluse.* Tome II, année 1902. Avignon.

VOSGES. **Saint-Dié.** *Bulletin de la Société philomatique vosgienne.* Tome XXVII. 1901-1902. Saint-Dié.

— **Épinal.** *Annales de la Société d'émulation du département des Vosges.* 1902. Épinal.

YONNE. **Auxerre.** *Bulletin de la Société des sciences historiques et naturelles de l'Yonne.* Année 1901. Auxerre-Paris.

Digitized by Google

GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG. **Luxembourg.** *Publications de la section historique de l'Institut grand-ducal.* Luxembourg.

— — *Publications de l'Institut grand-ducal de Luxembourg. Section des sciences naturelles et mathématiques.* Tome XXVI. 1901. Luxembourg.

— — *Recueil des mémoires et des travaux publiés par la Société grand-ducale de botanique du grand-duché de Luxembourg.* N° 15. 1900-1901. Luxembourg

— — *Ons Hemecht.* Années 1895-1901. Luxembourg.

NORVÈGE. **Christiania.** *Forhandlinger i Videnskabs Selskabet i Christiania.* 1901. Christiania.

RUSSIE. **Moscou.** *Observations faites à l'Observatoire météorologique de l'Université impériale de Moscou.* 1901. Moscou.

— **Saint-Pétersbourg.** *Bulletin de l'Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg.* 1901. Saint-Pétersbourg.

— — *Mémoires de l'Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg.* 1901. Saint-Pétersbourg.

— — *Annales de l'Observatoire physique central,* publiées par M. R. Y. Katchew. 1900. Saint-Pétersbourg.

SUÈDE. **Lund.** *Acta Universitatis Lundensis.* XXXVII. 1901. Lund.

— **Stockholm.** *Antiqvarisk Tidskrift för Sverige.* XVI, 3 livraisons. Stockholm.

Digitized by Google

— **Göteborg.** *Göteborgs Högskolas Arsskrift.* Bd. VII. 1901.

— **Upsal.** *Skrifter utgifna af K. Humanistiska Vetenskapssamfundet i Uppsala.* Bd. VII. Uppsala.

SUISSE. **Zürich.** *Mitteilungen der antiquarischen Gesellschaft in Zürich.* LXVI. Zürich.

— — *Anzeiger für schweizerische Altertumskunde.* 1902. Zürich.

— — *Schweizerisches Landesmuseum in Zürich. 10. Jahresbericht.* 1901. Zürich.

AFRIQUE

ALGÉRIE. **Alger.** *Revue africaine. Bulletin des travaux de la Société historique algérienne.* Année 1902. Alger.

AMÉRIQUE

ÉTATS-UNIS.

COLUMBIA. **Washington.** *Smithsonian miscellaneous Collections.* Vol. de 1902. Washington.

— — *Annual Report of the Smithsonian Institution.* 1901. Washington City.

— — *Annual Report of the Smithsonian Institution. U. S. National Museum.* 1901. Washington-City.

KANSAS. **Topeka.** *Transactions of the Kansas Academy of Sciences.* Vol. XVII. 1901. Topeka.

MASSACHUSSETTS. **Cambridge.** *Bulletin of the Museum of comparative Zoölogy.* 1902. Cambridge.

Digitized by Google

— **Boston.** *Proceedings of the American Academy of arts and sciences.* Vol. XXXVIII. Boston.

MISSOURI. **Saint-Louis.** *Transactions of the Academy of sciences of St. Louis.* 1902. Saint-Louis.

NEW-YORK. **Albany.** *University of the State of New-York. High School department Report. 1. Report of Director Bulletins. 2. Academies.* 1900. Albany.

— — — *State Museum Bulletin.* 1901. Albany.

— — — *State Museum Report.* 1901. Albany.

— — *University of the State of New-York. College department Report.* 1901. Albany.

— — — *Regents Report.* 1899. Albany.

— — — *State library Report.* 1900. Albany.

— — — *State Museum Bulletin.* 1901. Albany.

— — *Yearbook of the U. S. Department of Agriculture.* 1900. Washington.

— — *U. S. Department of Agriculture. Division of biological Survey. North Amerikan Fauna.* N° 21. Washington.

PENSYLVANIE. **Philadelphia.** *Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia.* Vol. 1902. Philadelphie.

WISCONSIN. **Madison.** *Transactions of the Wisconsin Academy.* 1901. Madison.

— — *Wisconsin geological and natural History Survey.* Bulletin n° VIII. Madison.

MEXIQUE. **Mexico.** *Boletin mensual del Observatorio meteorologico magnetico central de Mexico.* Année 1902. Mexico.

Digitized by Google

ACADÉMIES, SOCIÉTÉS SAVANTES, etc.

Avec lesquelles l'Académie de Metz échange ses Publications.

Les Sociétés correspondantes sont priées de considérer comme accusé de réception *de leurs envois à l'Académie l'inscription à la liste ci-dessus des publications qu'elles lui ont envoyées.*

Liste des Sociétés de divers pays avec lesquelles l'Académie se trouve en relation, à la date du 31 mai 1903.

EUROPE.

ALLEMAGNE (EMPIRE D') :

Alsace-Lorraine, *Colmar.* Société d'histoire naturelle de Colmar.
— — *Revue d'Alsace.*
— *Metz.* Société d'histoire naturelle de Metz.
— — Comice agricole de Metz.
— — Verein für Erdkunde zu Metz.
— — Société d'Histoire et d'Archéologie.
— — Bibliothèque et archives municipales
— — Musées municipaux.
— *Mulhouse.* Société industrielle de Mulhouse.
— *Strasbourg.* Société des sciences, agriculture et arts de la Basse-Alsace.
— — Club vosgien.

Bavière, *Munich.* Kœnigliche bayerische Akademie der Wissenschaften.

Prusse, *Brême.* Naturwissenschaftlicher Verein zu Bremen.
— *Gœrlitz.* Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften.
— *Kœnigsberg.* Kœnigliche physikalische-œkonomische Gesellschaft zu Kœnigsberg.
— *Trèves.* Gesellschaft für die nützlichen Forschungen zu Trier.

Saxe, *Halle a. d. S.* Kaiserlich-Leopold.-Carol.-Deutsche Akademie der Naturforscher.

Digitized by Google

Angleterre, *Cambridge*. Cambridge philosophical Society.
— *Manchester*. Literary and philosophical Society of Manchester.

Autriche-Hongrie, *Gratz*. Historischer Verein für Steiermark.
— *Lemberg*. Société historique de Léopold.

Belgique, *Anvers*. Académie d'archéologie de Belgique.
— *Arlon*. Institut archéologique du Luxembourg.
— *Bruxelles*. Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.
— — Observatoire royal.
— — Société malacologique de Belgique.
— — Société d'archéologie de Belgique à Bruxelles.
— *Enghien*. Cercle archéologique d'Enghien.
— *Gand*. Société d'histoire et d'archéologie de Gan[1].
— *Liége*. Institut archéologique liégeois.
— — Société de géologie de Belgique.
— — Société libre d'émulation de Liége.
— — Société royale des sciences de Liége.
— — Université de Liége.
— *Maredsous* (abbaye). *Revue bénédictine*.
— *Mons*. Société des sciences, des arts et des lettres du Hainaut.

FRANCE :

Ain, *Bourg*. Société d'émulation de l'Ain.
— — Société Gorini.

Aisne, *Laon*. Société académique de Laon.
— *Saint-Quentin*. Société académique de Saint-Quentin.

Alpes-Maritimes, *Nice*. Société des lettres, sciences et arts du département des Alpes-Maritimes.

Aube, *Troyes*. Société académique d'agriculture, sciences, arts et belles-lettres du département de l'Aube.

Aveyron, *Rhodez*. Société des lettres, sciences et arts de l'Aveyron.

Belfort (Territoire de). Société belfortaine d'émulation, à Belfort.

Bouches-du-Rhône, *Aix*. Académie des sciences, agriculture, arts et belles-lettres d'Aix.
— *Marseille*. Académie des sciences, belles-lettres et arts de Marseille.

Digitized by Google

Calvados, *Caen.* Académie nationale des sciences, arts et belles-lettres de Caen.

— — Société des antiquaires de Normandie.

— — Société Linnéenne de Normandie.

Charente-Inférieure, *Rochefort.* Société de géographie de Rochefort.

Côte-d'Or, *Dijon.* Académie des sciences, arts et belles-lettres de Dijon.

Doubs, *Besançon.* Académie des sciences, belles-lettres et arts de Besançon.

Eure, *Evreux.* Société libre d'agriculture, sciences, arts et belles-lettres de l'Eure.

Finistère, *Brest.* Société académique de Brest.

Gard, *Nimes.* Académie de Nîmes.

Garonne (Haute-), *Toulouse.* Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse.

— — Académie des jeux floraux.

— — Société archéologique du midi de la France.

— — Société d'agriculture de la Haute-Garonne, 20, rue Saint-Antoine-du-T.

Gironde, *Bordeaux.* Académie des sciences, belles-lettres et arts de Bordeaux.

— — Société Linnéenne de Bordeaux.

Indre-et-Loire, *Tours.* Société d'agriculture, sciences, arts et belles-lettres du département d'Indre-et-Loire.

Isère, *Grenoble.* Académie Delphinale.

Jura, *Lons-le-Saulnier.* Société d'émulation du Jura.

Landes, *Dax.* Société de Borda.

Loire, *Saint-Etienne.* Société d'agriculture, industrie, sciences, arts et belles-lettres du département de la Loire.

Loire (Haute-), *Le Puy.* Société d'agriculture, sciences, arts et commerce du Puy.

Loire-Inférieure, *Nantes.* Société académique de Nantes et de la Loire-Inférieure.

— — Société des sciences naturelles de l'ouest.

Loiret, *Orléans.* Société archéologique et historique de l'Orléanais.

Lozère, *Mende.* Société d'agriculture, industrie, sciences et arts du département de la Lozère.

Digitized by Google

Maine-et-Loire, *Angers.* Société d'agriculture, sciences et arts d'Angers.

— — Société industrielle d'Angers et de Maine-et-Loire.

Manche, *Cherbourg.* Société des sciences naturelles de Cherbourg.

Marne, *Reims.* Académie de Reims.

— *Vitry-le-François.* Société des sciences et arts de Vitry-le-François.

Meurthe-et-Moselle, *Nancy.* Académie de Stanislas.

— — Société d'archéologie lorraine.

— — Société centrale d'agriculture de Nancy.

— — Bibliothèque des archives départementales de la ville de Nancy.

Meuse, *Bar-le-Duc.* Société des lettres, sciences et arts de Bar-le-Duc.

— *Verdun.* Société philomatique de Verdun.

Morbihan, *Vannes.* Société polymatique du Morbihan.

Nord, *Cambrai.* Société d'émulation de Cambrai.

— *Douai.* Société d'agriculture, de sciences et d'arts, à Douai.

— *Dunkerque.* Société dunkerquoise pour l'encouragement des sciences, des lettres et des arts.

— *Lille.* Société des sciences, de l'agriculture et des arts.

Oise, *Beauvais.* Société académique d'archéologie, sciences et arts du département de l'Oise.

Pas-de-Calais, *Arras.* Académie des sciences, lettres et arts d'Arras.

Puy-de-Dôme, *Clermont-Ferrand.* Académie des sciences, belles-lettres et arts de Clermont-Ferrand.

— — *Revue d'Auvergne.*

Pyrénées-Orientales, *Perpignan.* Société agricole, scientifique et littéraire des Pyrénées-Orientales.

Rhône, *Lyon.* Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon.

— — Société d'agriculture, sciences et industrie de Lyon, 30, quai Saint-Antoine.

— — Société littéraire, historique et archéologique de Lyon, 6 rue de l'Hôpital.

— — Société académique d'architecture de Lyon.

Digitized by Google

Saône (Haute-), *Vesoul*. Société d'agriculture, sciences et arts de la Haute-Saône.

Saône-et-Loire, *Autun*. Société Éduenne des lettres, sciences et arts.

— *Chalon-sur-Saône*. Société d'histoire et d'archéologie de Chalon-sur-Saône.

Sarthe, *Le Mans*. Société d'agriculture, sciences et arts de la Sarthe.

Seine, *Paris*. Société des Antiquaires de France (au palais du Louvre).

— — Société nationale d'agriculture de France (18, rue de Bellechasse).

— — Université de Paris. Bibliothèque de la Faculté des lettres.

— — Société zoologique d'acclimatation (41, rue de Lille).

Seine-et-Oise, *Versailles*. Société d'agriculture de Seine-et-Oise.

— — Société des sciences morales, des lettres et des arts de Seine-et-Oise.

Seine-Inférieure, *Le Havre*. Société havraise d'études diverses.

— *Rouen*. Académie des sciences, belles-lettres et arts de Rouen.

— — Société libre d'émulation, commerce et industrie de la Seine-Inférieure.

— — Société des amis des sciences naturelles de Rouen.

— — Société d'agriculture du département de la Seine-Inférieure.

— — Société centrale d'horticulture du département de la Seine-Inférieure

Somme, *Abbeville*. Société d'émulation d'Abbeville.

— *Amiens*. Académie des sciences, des lettres et des arts d'Amiens.

— — Société des Antiquaires de Picardie.

Tarn-et Garonne, *Montauban*. Académie des sciences, belles-lettres et arts de Tarn-et-Garonne.

Var, *Toulon*. Académie du Var.

Vaucluse, *Avignon*. Académie de Vaucluse.

Vosges, *Épinal*. Société d'émulation du département des Vosges.

— *Saint-Dié*. Société philomatique vosgienne.

Yonne, *Auxerre*. Société des sciences historiques et naturelles de l'Yonne.

Digitized by Google

Luxembourg (Grand-duché de), *Luxembourg*. Institut royal grand-ducal de Luxembourg.
— — Société de botanique de Luxembourg.
— — Cercle agricole et horticole du grand-duché de Luxembourg.
— — Verein für Luxemburger Geschichte, Litteratur und Kunst.

Norvège, *Christiania*. Kongeliche norske Fredericks universitet.
— — Observatoire de Christiania.
— — Videnskabs-Selskabet i Christiania.

Russie, *Saint-Pétersbourg*. Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg.
— — Observatoire physique central de Russie.
— — Société d'archéologie et de numismatique de Saint-Pétersbourg.
— *Moscou*. Université impériale. Observatoire.

Suède, *Lund*. Lunds universitet.
— *Stockholm*. Université.
— — Kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademie.
— *Upsala*. Société des lettres d'Upsala.

Suisse, *Zurich*. Antiquarische Gesellschaft in Zurich.
— — Landesmuseum.

AFRIQUE.

Algérie, *Alger*. Société historique algérienne.
Égypte, *Le Caire*. Société khédiviale de géographie du Caire

---

AMÉRIQUE.

Californie, *San-Francisco*. Academy of Sciences.
Canada, *Ottawa*. Institut Canadien-Français.

Digitized by Google

ÉTATS-UNIS :

Columbia, *Washington.* U. S. Department of Agriculture.
— — Interior Department.
— — Smithsonian Institution.
Connecticut, *New-Haven.* Academy of Arts and Sciences of Connecticut.
Iowa, *Davenport.* Davenport Academy of natural Sciences.
Kansas, *Topeka.* Academy of Kansas.
Massachusetts, *Boston.* American Academy of Arts and Sciences
— *Cambridge.* Museum of comparative Zoölogy at Harvard College.
Missouri, *Saint-Louis.* Academy of Sciences of Saint-Louis.
New-York, *New-York.* University of the State of New-York.
Pennsylvanie, *Philadelphie.* Academy of natural Sciences.
Wisconsin, *Madison.* Wisconsin Academy of sciences, arts and letters.

Mexique, *Mexico.* Observatorio Meteorologico-Magnetico Central de Mexico.

ASIE.

Chine, *Zi-Ka-Wei,* Observatoire magnétique et météorologique de Zi-Ka-Wei, près Chang-Hai.

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
Jährliche Sitzung.	1
Compte rendu des travaux de l'Académie pendant l'année 1902-1903, par M. Prével	3
Bureau de l'Académie pour 1903.	13
Tableau des Membres de l'Académie . . .	15
Rapport de M. Lametz sur le concours des prix de vertu en 1902-1903.	25
Rapport de M. le Chanoine H. Collin sur *Le Jardin* de M. l'abbé Houllier	39
A propos d'électricité, note de M. Huber .	47
A propos du démantèlement de Metz, réflexions par M. Eug. Colon.	53
Projet d'un dispositif destiné à répéter l'expérience de Foucault sur une petite échelle, par M. A. Schuster	65
Rapport de M. Paul de Goy sur le Mémoire de M. Massing sur les Normales à la Parabole.	83
Normales à la Parabole en coordonnées cartésiennes, par M. C. Massing.	Pagination particul.

Digitized by Google

Programme des concours ouverts pendant l'année 1902-1903 93

Ouvrages imprimés offerts à l'Académie pendant l'année 1902-1903. 101

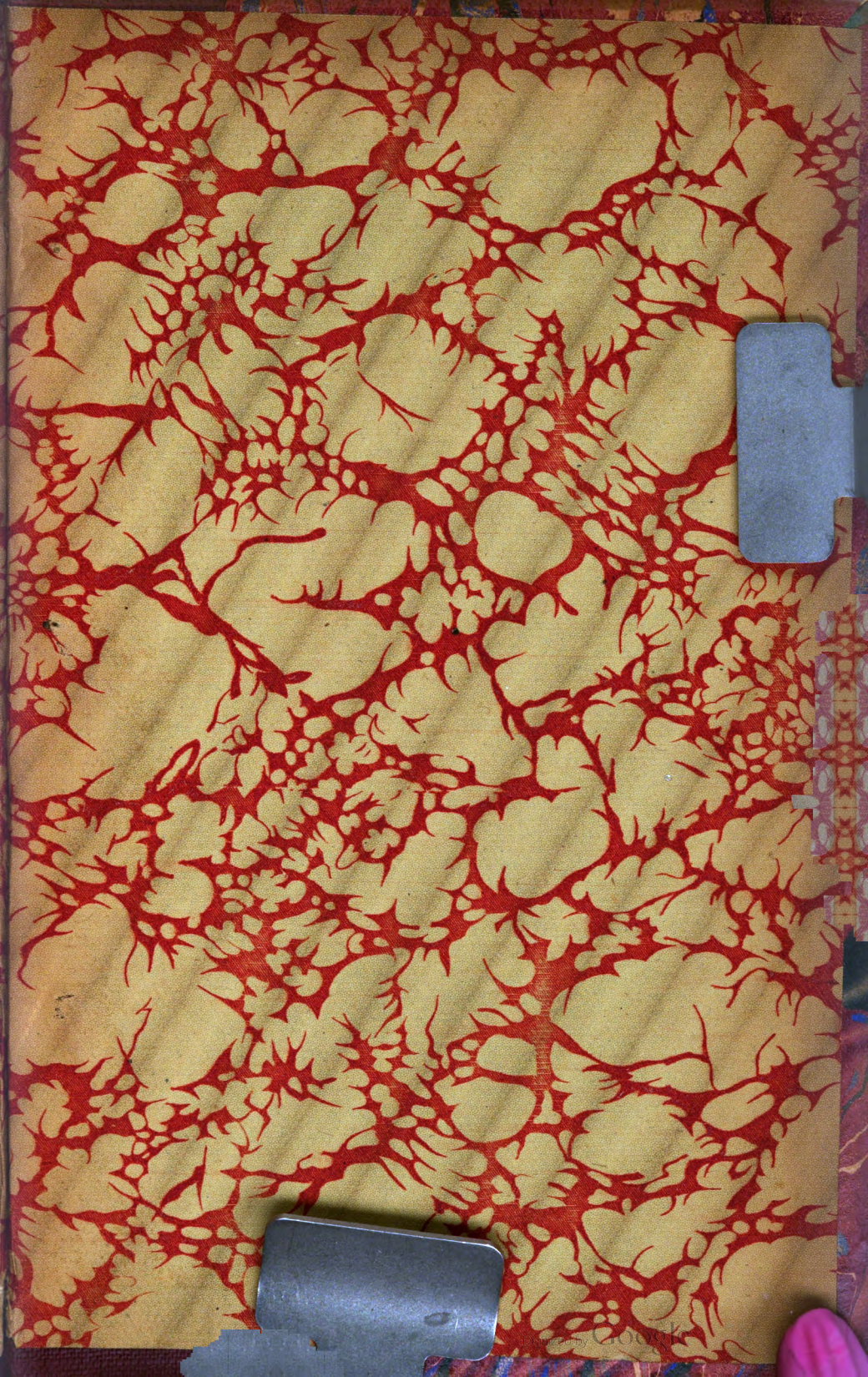
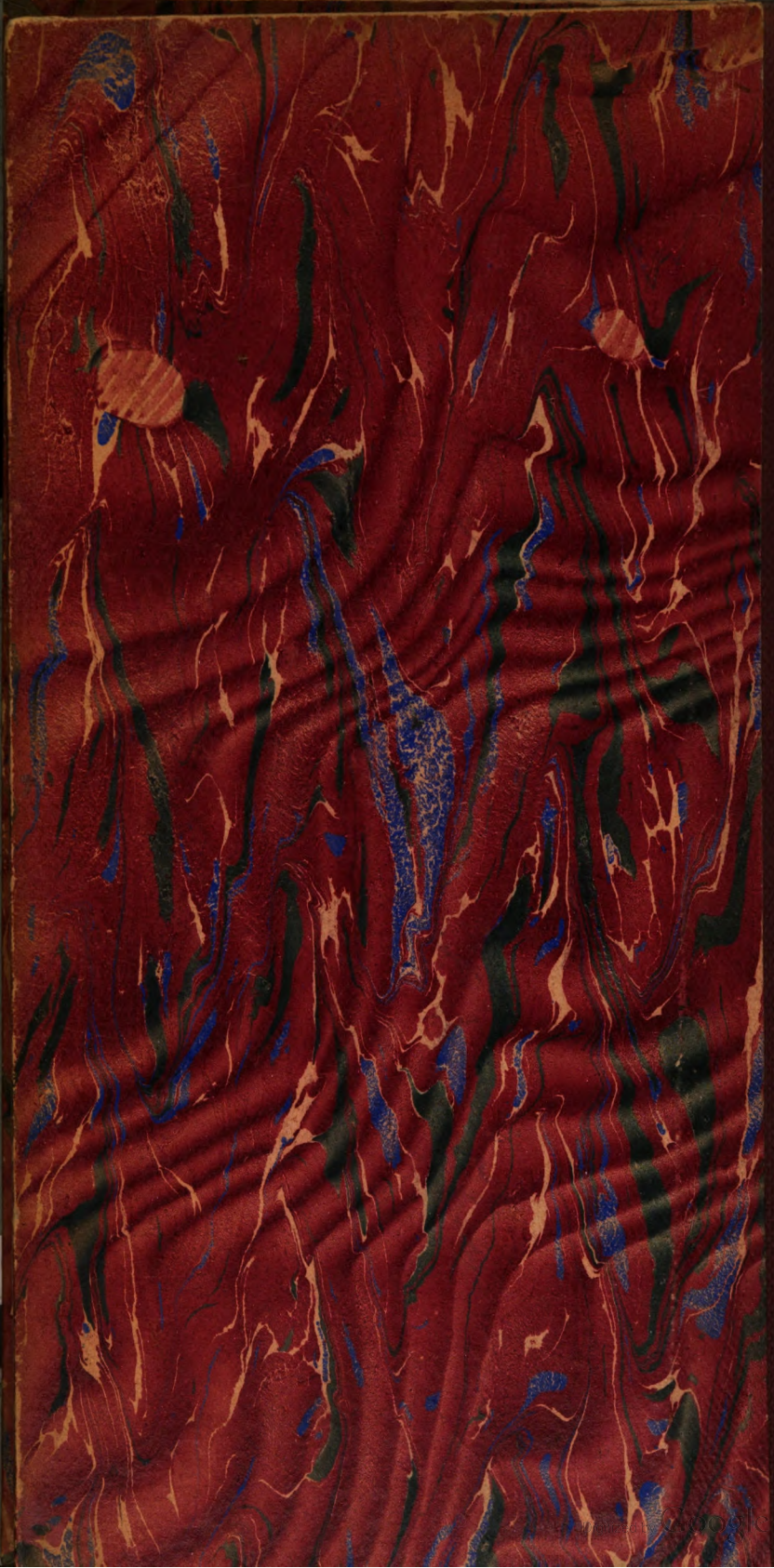
Académies, Sociétés savantes, etc., avec lesquelles l'Académie de Metz échange ses publications. 115

IMP. LORRAINE, 14, R. DES CLERCS. — METZ.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Princeton University Library
32101 073762211